٢-٣: تقدير نموذج الانحدار باستخدام طريقة المربعات الصغرى:

هناك عدة طرق لتقدير معاملات معادلة الانحدار أهمها

- طريقة المربعات الصغرى.
- طريقة الإمكانية العظمى.

في المرحلة الأولى نفترض وجود الفروض الأساسية لمعالجة النموذج الخطي. وفي المراحل اللاحقة نتعرض للحالات التي تكون فيها هذه الفروض غير صحيحه.

نموذج الانحدار بالافتراضات الأساسية كما يلي:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u$$

هي المعادلة الأساسية التي تصور العلاقة بين التابع والمستقل حيث i تعتمد على العينة التي يبلغ حجمها **n** . بالإضافة إلى المعادلة الأساسية نقول أن النموذج يحتوي افتراضات عن المتغير العشوائي.

تقدير النموذج يتم بغرض الحصول على مقدرات معالم نموذج الانحدار البسيط. نموذج الانحدار البسيط يتضمن ثلاث معالم هي، , αمعلمة القاطع، , β معلمة الميل، σ^2 معلمة التباين. المراد هو استخدام إحصائيات المتغيرات التابعة والمتغيرات المستقلة حسب الطرق الإحصائيه الملائمة للحصول على مقدرات لهذه المعالم.

٢ – ٤ : طريقة المربعات الصغرى:

تعتمد طريقة المربعات الصغرى العادية على الحصول على مقدرات , الانحدار حيث تمثل αمعلمة القاطع، , β معلمة الميل. بحيث يتم تصغير مجموع مربعات البوا قي إلى آدني قيمه لها. بحيث يجري تعريف مكون يطلق علية مجموع المربعات البوا قي وبعد ذلك يشرع في الحصول على , α، , β بحيث يتم تصغير هذا المكون إلى أدنى قيمه له. وطريقة المربعات الصغرى تعطينا مقدرات الانحدار , α، , β ولكن لا تعطينا مقدرة التباين وهذا يعتبر من نقاط ضعف طريقة المربعات الصغرى.

المعيار الخاص في المربعات الصغرى العادية: النموذج المقدر هو كما يلي

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X + u_i$$

u هي البوا قي والتي تساوي من النموذج $u_i = Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X)$ نموذج الانحدار ممكن أن يمر من خلال انتشار البيانات الخاصة بـ Y, X، الخط المقدر هنا هو الذي يعطي Y المقدرة

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$$

إذا أخذنا إحداثيات القيم Y,X إحداثيات النقطة الأولى تنقسم إلى قسمين، قسم من المحور الأفقي في النموذج المقدر، هذا عبارة عن $\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$ الجزء الثاني عبارة عن قيمة البوا قي. فالمشاهدة Y هي حصيلة جمع $u + \hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$ أي أن أي مشاهده مكونه من جانبين، جانب الخط المقدر والبواقي. البواقي بحكم أنها مقدرة العنصر العشوائي يمكن أن تكون موجبة وممكن أن تكون سالبه وكذلك من الناحية النظرية يمكن أن تساوي الصفر.

للحصول على مقدرات المربعات الصغرى العادية يجب أن نحصل أولا على البواقي:

$$u_t^2 = (\hat{Y} - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X))^2$$

مجموع مربعات البواقي $=\sum u^2$

$$\sum u_i^2 = \sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)^2$$

يتم التوصل إلى الخط الذي تكون فيه مجموع مربعات البواقي اصغر ما يمكن [اختيار الخط الذي يدني مجموع مربعات البواقي إلى أصغر ما يمكن]. باستخدام الرياضيات فأن شرط الدرجة الأولى يتطلب أجراء التفاضل بالنسبة للمجاهيل β α نستخدم التفاضل الجزئي وبعد ذلك نساوي المعادلات التي تم أل تحصل عليها بالصفر ثم نطبق المعادلات الآنية للحصول على قيم المقدرات.

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial\hat{\alpha}} = (2)\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)(-1) = 0$$

$$= (-2)\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$

$$\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$ نساوي بالصفر

بادخال المجموع Σ وحيث ان αعدد ثابت فأن $n\,\alpha = \Sigma\,\alpha$ ثم بقسمة المعادلة على n نحصل على مايلي:

$$\sum Y_i - \sum_i \hat{\alpha} - \hat{\beta}\sum_i X = 0$$
$$\sum_i \hat{\alpha} = \sum Y_i - \hat{\beta}\sum_i X$$
$$n\hat{\alpha} = \sum Y_i - \hat{\beta}\sum_i X$$
$$\hat{\alpha} = \frac{\sum Y_i}{n} - \hat{\beta}\frac{\sum_i X}{n}$$
$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X}$$

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial\hat{\beta}} = (2)(\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)(-X) = 0$$

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial\hat{\beta}} = -2\sum X(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$

$$(\sum X(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$

$$-\sum XY + \sum X\alpha + \sum \beta X^2 = 0$$

نساوي بالصفر

$$\sum XY = \alpha \sum X + \beta \sum X^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\hat{\alpha} + \left(\sum_{i=1}^{n} X^2\right)\hat{\beta} \qquad ٢,٥$$

بالتعويض بقيمة α نحصل على

$$\sum XY = \sum X\left(\frac{\sum Y}{n} - \beta\frac{\sum X}{n}\right) + \beta \sum X^2 \qquad 2.6$$

بالضرب في n

$$n\sum XY = \sum X \sum Y - \beta(\sum X)^2 + \beta\, n\sum X^2$$

$$n\sum XY - \sum X \sum Y = -\beta(\sum X)^2 + \beta\, n\sum X^2$$

$$= \beta\, n\sum X^2 - \beta(\sum X)^2 \qquad ٢,٧$$

$$= \beta\left(n\sum X^2 - (\sum X)^2\right)$$

معادلة ٢,٧ تسمى المعادلات الطبيعية ونستطيع استخراج قيم α β منها

بالتعويض نحصل على

$$\boxed{\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum^{n} X_i \sum Y_t}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X\right)^2} =}$$

من الممكن الحصول على المقدرات باستخدام الانحرافات كما يلي:

$$\sum y_i = \sum (Y-\overline{Y})^2 \qquad = \sum Y_i^2 - n\overline{Y}^2$$

$$\sum xy = \sum (X-\overline{X})(Y-\overline{Y}) = \sum XY - n\overline{XY}$$

$$\sum x^2 = \sum (X-\overline{X})^2 \qquad = \sum X^2 - n\overline{X}$$

ولكن

$$\sum Y_i X_i = \sum X_i(\overline{Y}_i - \hat{\beta}\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum Y_i X_i = n\overline{X}(\overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum Y_i X_i = n\overline{X}\,\overline{Y} - \hat{\beta} n\overline{X}\,\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum Y_i X_i - n\overline{X}\,\overline{Y} = -\hat{\beta} n\overline{X}\,\overline{X} + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum XY - n\overline{XY} = -\hat{\beta} n\overline{X}^2 + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum xy = \beta\left[nX^2 - \sum X^2\right]$$

$$\sum xy = \beta\sum x^2$$

$$\beta = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

<u>مثال (١)</u>

X	**Y**	**X^2**	**x**	**y**	**XY**	xy	x^2
2	4	4	-2	-4	8	8	4
3	7	9	-1	-1	٢١	1	1
1	3	1	-3	-5	٣	15	9
5	9	25	1	1	٤٥	1	1
9	17	81	5	9	١٥٣	45	25
∑X= 20	**∑Y= 40**	**$\sum X^2$= 120**			**∑XY= 230**	**∑xy=70**	**$\sum x^2$=40**

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum^{n} X_i \sum Y_t}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X\right)^2} =$$

$$\hat{\beta} = \frac{(5)(230)-(20)(40)}{5(120)-(20)^2} = 1.75$$

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X} = 8 - 1.75(4) = 1$$

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X =$$

$$\hat{Y} = 1 + 1.75X$$

باستخدام الانحرافات

$$\hat{\beta} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{70}{40} = 1.75$$

	X	Y	x	y	xy	x^2	XY	X^2
1	١٠٠	٥٥	30	-45	1650	900	5500	10000
2	٩٠	٧٠	20	-30	1400	400	6300	8100
3	٨٠	٩٠	10	-10	900	100	7200	6400
4	٧٠	١٠٠	0	0	0	0	7000	4900
5	٧٠	٩٠	0	-10	0	0	6300	4900
6	٧٠	١٠٥	0	5	0	0	7350	4900
7	٧٠	٨٠	0	-20	0	0	5600	4900
8	٦٥	١١٠	-5	10	-550	25	7150	4225
9	٦٠	١٢٥	-10	25	-1250	100	7500	3600
10	٦٠	١١٥	-10	15	-1150	100	6900	3600
11	٥٥	١٣٠	-15	30	-1950	225	7150	3025
12	٥٠	١٣٠	-20	30	-2600	400	6500	2500
المجموع	**840**	**1200**			**-3550**	**2250**	**80450**	**61050**
	X=70	**Y=100**						
					β=-3550/2250=-1.6			