جامعة ديالى
كلية الإدارة والاقتصاد
قسم الاقتصاد

محاضرات

في الاقتصاد القياســـــــــــي

١-١: ما هو الاقتصاد القياسي:

كلمة الاقتصاد القياسي تعني حرفيا القياس في الاقتصاد، هذه معنى واسع يشمل العديد من المفاهيم الاقتصادية والتي تعتمد في الغالب على القياسات حيث اغلب الاقتصاديون يهتمون بعملية القياس حيث يتم قياس الناتج المحلي، البطالة، عرض النقود، الصادرات، الواردات، ..الخ. ماذا نقصد بالاقتصاد القياسي؟ هو تطبيق الطرق الرياضية والإحصائية لتحليل البيانات الاقتصادية بهدف إعطاء محتوى رقمي للنظريات الاقتصادية للتأكد من صحة تلك النظريات. من هذه التعريف نستطيع أن نفرق بين الاقتصاد الرياضي والاقتصاد القياسي، حيث يعتمد الاقتصاد الرياضي على تطبيق النظريات الرياضية فقط. والنظريات المشتقة لا تستلزم بالضرورة على بيانات رقميه. البداية الحقيقية للاقتصاد القياسي هي مع تأسيس جمعية الاقتصاد لقياسي (Econometric Society) في عام (1930) ودورية اكنومتريكا (Econometrical Journal) في يناير (1933).

١-٢: النماذج الاقتصادية والقياسية:

المهمة الأولى للاقتصاد القياسي هي تكوين النموذج القياسي. ما هو النموذج القياسي؟ النموذج (Model) هو تمثيل مبسط للواقع الحقيقي. على سبيل المثال نقول إن الكميه المطلوبة من البرتقال تعتمد على سعر البرتقال هذه تعتبر تبسيط للواقع لان هناك العديد من العوامل المؤثرة على قرار شراء البرتقال على سبيل المثال الدخل، نوعية الغذاء ، الذوق، ...سعر التفاح... الخ من الأسباب التي قد تؤثر على قرار شراء كميه من البرتقال.

العديد من العلماء نادوا بعملية التبسيط لأن النماذج المبسطة تمثل وسيله ابسط لفهم الواقع ولتوصيل المعلومة وكذلك أسهل في عملية اختبار النظرية والتأكد من صحتها. مثل كارل بوبر (Karl Popper) و ميلتون فريمان (Milton Friedman) . أن اختيار نموذج مبسط لشرح العالم الحقيقي يؤدي إلى الانتقاد ين التاليين:

- النموذج يكون مبسط جدا.
- الافتراضات غير واقعية.

على سبيل المثال، مثال الطلب على البرتقال، ببناء نموذج الطلب على البرتقال يعتمد فقط على السعر هو تبسيط للواقع، وغير واقعي. للرد على انتقاد التبسيط نستطيع إن نقول انه من الأفضل الابتداء بنموذج مبسط وبناء نموذج اكثر تعقيدا. هذه الفكرة عبر عنها كوبمان. وفي الجانب الأخر هناك من يقول انه الأفضل الابتداء بنموذج عام وتبسيطه حسب البيانات الموجودة مثل سرجان (Sargan) و ديفيد هنري (David Hendry)

أما من ناحية الافتراضات غير واقعية فهذا يسري على معظم النظريات حيث يقول فريمان إن الافتراضات لأي نظريه لا تتسم بالواقعية يقول: السؤال المهم عن الافتراضات ليس ما إذا كانت تصور صورة واقعية بل هو فإذا كانت تعطي صوره تقريبية كافيه للغرض المطلوب. وهذا السؤال يمكن ألا جابه عنه برؤية ما إذا كانت النظرية تعمل أي هل تعطي تنبؤات صحيحه؟. بالعودة إلي مثالنا السابق، الطلب على البرتقال، إذا قلنا انه فقط يعتمد على سعر البرتقال هذا افتراض وصفي غير واقعي. ولكن، إذا أضفنا المتغيرات الأخرى. مثل الدخل وسعر التفاح فان هذا لا يضيف واقعية إلي النموذج. حتى هذا النموذج ممكن القول انه لا يتسم بالواقعية وذلك لأن هناك متغيرات أخرى لم يتضمنها النموذج. ولكن مسألة آي من النماذج يكون اكثر فائدة في التنبؤ بالطلب على البرتقال هذا يعتمد على البيانات المتوفرة والبيانات التي

يمكن الحصول عليها. عمليا، يتضمن النموذج جميع المتغيرات التي تعتبر مهمة في تحديد النموذج ونترك المتغيرات في المتغير العشوائي. هذا ما يفرق بين النموذج الاقتصادي والنموذج القياسي.

النموذج الاقتصادي هو مجموعه من الافتراضات التي تصف بالتقريب سلوك اقتصاد معين أو قطاع من الاقتصاد. **النموذج القياسي يتكون مما يلي:**

أولاً: مجموعه من المعادلات السلوكية المشتقة من نموذج اقتصادي. هذه المعادلات تتضمن بعض المتغيرات و متغير عشوائي والذي يتضمن جميع المتغيرات والتي تعتبر غير رئيسيه في وصف الغرض المطلوب للنموذج

ثانياً: يفيد ما إذا كان هناك خطأ في المشاهدات المتحصل عليها.

ثالثاً: تحديد توزيع الاحتمالات للمتغير العشوائي.

بهذه المحددات نستطيع أن نواصل اختبار صحة النموذج الاقتصادي ويستخدم للتبوء أو تحليل سياسة اقتصادية معينه.

مثال: دالة الطلب، النموذج القياسي كما يلي:

أولاً: المعادلة السلوكية $Q = \alpha + \beta P + u$

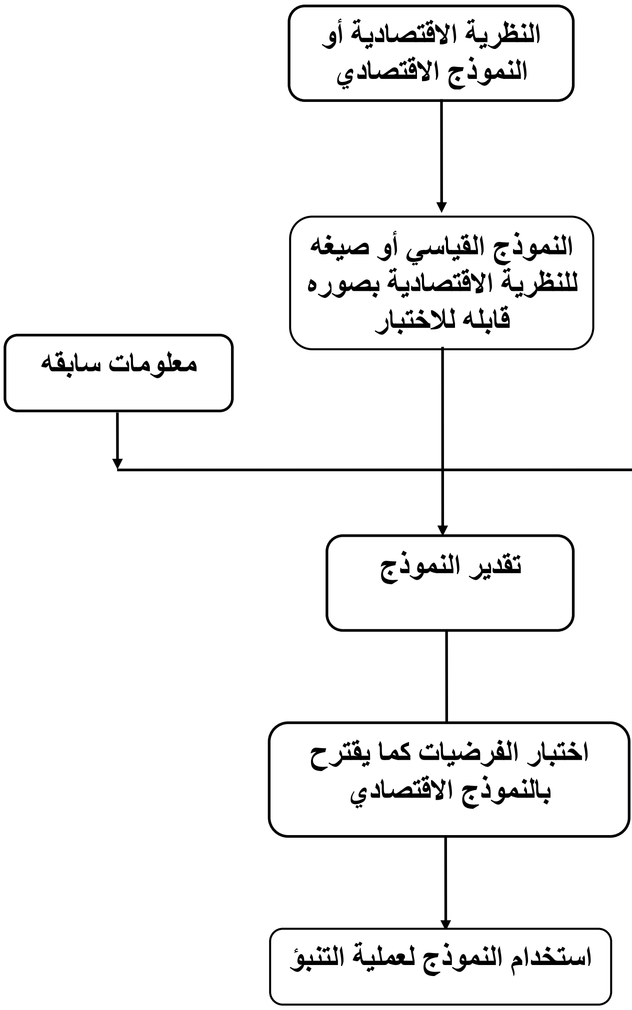
حيث (Q) الكميه المطلوبة، و(P) السعر. حيث تمثل المتغيرات المشاهدة و (u) متغير عشوائي. و (β و α) معالم النموذج.

ثانيــاً: تحديد التوزيع الاحتمالي للعشوائي حيث يعبر عنه بما يلي: $E(u) = 0$ وقيم المشاهدات المختلفة مستقله وموزعه توزيع طبيعي بوسط = الصفر وتباين σ^2

بهذه المحددات يمكن مواصلة اختبار قانون الطلب. وكذلك يمكن استخدام الدالة للتنبوء بأي تغير في السعر.

شـــــكل (1-1)

الخطوات التي يجب إتباعها في تحليل القياسي لنموذج اقتصادي:



النموذج الخطي لمتغيرين: الانحدار البســـيط

٢-١: المقدمة:

تحليل الانحدار من أكثر الأدوات المستعملة في التحليل القياسي لذا سوف نبدأ بتحديد الخطوط العريضة لتحليل الانحدار. بينما في الفصول التالية سوف تتعامل مع التعديلات وتوسيع للأساليب الأساسية اللازمة في تحليل البيانات الاقتصادية.

نبدأ بالسؤال الأساسي: ما هو تحليل الانحدار؟ تحليل الانحدار يهتم بوصف وتقييم العلاقة بين متغير (عادة يسمى المتغير التابع) وواحد آو اكثر لمتغيرات أخرى (تسمى عادة المتغيرات المفسرة آو المتغيرات المستقلة) ويرمز للمتغير المفسر بـ **(y)** والمتغيرات المفسرة بـ**(xn ... x3 x2 x1)**. التفسير الحرفي لكلمة انحدار تعني" ارتداد أو انكفاء أو رجوع" في الحقيقة تحليل الانحدار لا يربطه بهذا المعنى أي رابط.

كلمة انحدار استخدمت من قبل **سير فرنسيس جالتون Sir Francis Galton (1982-1911)** من إنجلترا. والذي كان يدرس العلاقة بين طول الأبناء وطول الآباء والذي لاحظ جالتون أن الطول يميل إلى المعدل مع أن الآباء الطوال يكون أبنائهم طوال والآباء القصار يميل أبنائهم لان يكونوا قصار أي أن هناك ميل عند الأبناء للمعدل أي أن هناك انحدار نحو المعدل. في دراسات أخرى مشابهه تحصل على نفس النتيجة التي تحصل عليها جالتون.

بالعودة إلى الرموز التي استخدمناها حيث رمزنا للمتغير المفسَر بـ y والمتغيرات المفسرة بـ**(xn ... x3 x2 x1)**. إذا كانت $\mathbf{k = 1}$ ، أي إن هناك متغير مستقل واحد فقط من المتغيرات المفسرة. أي ان هناك x واحدة فقط. يعرف هذا بالانحدار البسيط. وهو ما سوف يتم مناقشته في هذا الفصل. إذا كانت $\mathbf{k > 2}$ ، أي أن هناك اكثر من $\mathbf{x}$ واحد و متغير مستقل. نحصل على ما يعرف بالانحدار المتعدد. والذي سوف نناقشه في الفصل القادم.

مثال ١ : الانحدار البسيط.

y = المبيعات

x = النفقات الإعلانية.

حيث يتم تحديد العلاقة بين المبيعات والنفقات الإعلانية.

مثال ٢: الانحدار المتعدد.

Y = استهلاك ألا سره.

X = دخل ألا سره.

X_2 = الأصول المالية للأسرة

X_3 = حجم ألا سره

تحديد العلاقة بين نفقات استهلاك ألا سره من جهة والدخل، والأصول المالية و حجم ألا سره من جهة اخرى. وهناك عدة أسباب لدراسة هذه العلاقات. يمكن استخدام ذلك في :

أولاً: تحليل تأثير بعض السياسات التي تتضمن تغير قيم لفرد معين. في المثال الأول نستطيع أن نحلل تأثير النفقات الإعلانية على كمية المبيعات.

ثانياً: التنبؤ بقيم Y من قيم X.

ثالثاً: اختبار مدى معنوية العلاقة بين آي من X و Y.

في مناقشتنا نفرق بين المتغير Y و المتغيرات X. افترضنا أن المتغيرات X هي المتغير الذي يؤثر على المتغير Y. هناك العديد من المصطلحات التي نطلقها على Y , X توجد في الجدول الآتي.

جدول (2−1):

مصطلحات المتغير التابع و المتغير المستقل.

ت	X	Y
1	مًتنبأ	متَنبأ به

مفَسر	مفسر	2
تابع	مستقل	3
متأثر	مسبب	4
داخلي	خارجي	5
المتغير الهدف	المتغير المتحكم	6

كل من هذه المصطلحات يستخدم حسب الغرض من تحليل الانحدار فالمصطلح الأول يستخدم في عملية التنبؤ بينما المصطلحات الأخرى تستخدم في مناقشة الانحدار. اما المصطلح خارجي وداخلي تستخدم فقط من قبل القياسيين. بينما المصطلح الأخير يستخدم في التجارب الخاصة بدراسة تأثير مسببات معينه على متغير مستهدف.

٢-٢: تحديد العلاقة:

العلاقة بين **Y** و**X** تمثل بالتالي:

$$Y = f(X)$$

حيث ترمز لـ **Y** كدالة لـ**X**. نستطيع إن نقسم العلاقة إلى نوعين:-

١- علاقة رياضية محدده.Deterministic

٢- علاقة إحصائية لا تعطي قيمه فريدة لـ **Y** من قيمه محدده من **X**. ولكن يمكن أن توصف بصيغة احتماليه.

١-٣: الهدف وطريقة الاقتصاد القياسي:

الهدف من الاقتصاد القياسي:

أولاً: بناء نموذج قياسي، أي بناء نموذج اقتصادي مبني على الملاحظة بشكل يمكن اختباره. هناك العديد من الطرق لبناء النموذج القياسي من النموذج الاقتصادي لأننا يجب أن نختار

الشكل المناسب، تحديد البناء العشوائي للمتغيرات، وهكذا. هذا يكون الجزء التحد يدي من العمل القياسي.

ثانياً: تقدير واختبار هذه النماذج باستخدام البيانات المشاهدة.

ثالثاً: استخدام تلك النماذج للتنبؤ و لأغراض التحليل.

خلال الخمسينات والستينات كان القياسي يقوم على الاستنتاج (Inference) ولكن تحديد النموذج لم يؤخذ في الاعتبار كثيرا. كان الاهتمام موجه للتقدير الإحصائي لنموذج قياسي محدد. خلال الأربعينات قامت مؤسسة (Cowles) بتقدم كبير في هذا المضمار.

ولكن التحليل الإحصائي مثل عقبه كبيرة. لذلك انحصر الوضع في طرق تقدير مختلفة في الخمسينات والستينات.

لم يتم توجيه الاهتمام لخطأ في التحديد. ولكن مع التقدم في التقنية واستخدام أجهزة الحاسب الآلي السريعة. بدأ تطوير في الأساليب القياسية حيث وجه الاهتمام إلى مجالات أخرى في التحليل.

نستطيع أن نرتب خطوات التحليل القياسي، كما يتضح في الشكل (2−1). هذا التنظيم واجه بعض الانتقادات في السبعينات، بعض هذه الانتقادات يمكن تلخيصها بما يلي:

أولاً: لا يوجد استرجاع من الاختبار القياسي للنظرية الاقتصادية، وكذلك لا يوجد نتائج للاختبار يمكن على ضوئها تقييم النظرية الاقتصادية.

ثانياً: البيانات يجب أن يكون لها تأثير على النموذج.

ثالثاً: اختبار الفرضيات لا يجب أن يرتبط بما تقترحه النظرية فقط. بل يجب اختبار ملائمة التحديد السابق. لذلك يجب إضافة قفص جديد لاختبار ملائمة وتحديد النموذج.

التطور الذي نلاحظه على شكل (2-1) هو:

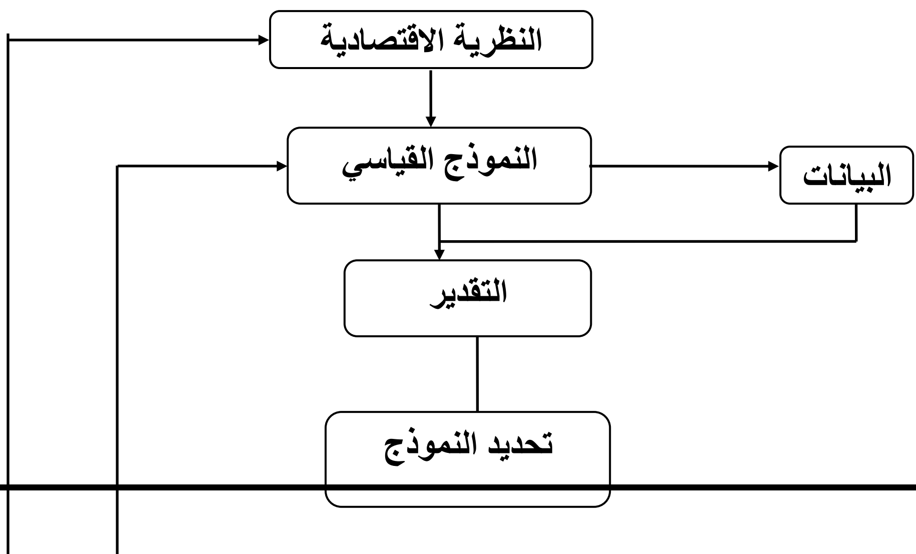
أ- من النتائج القياسية إلى النظرية الاقتصادية.

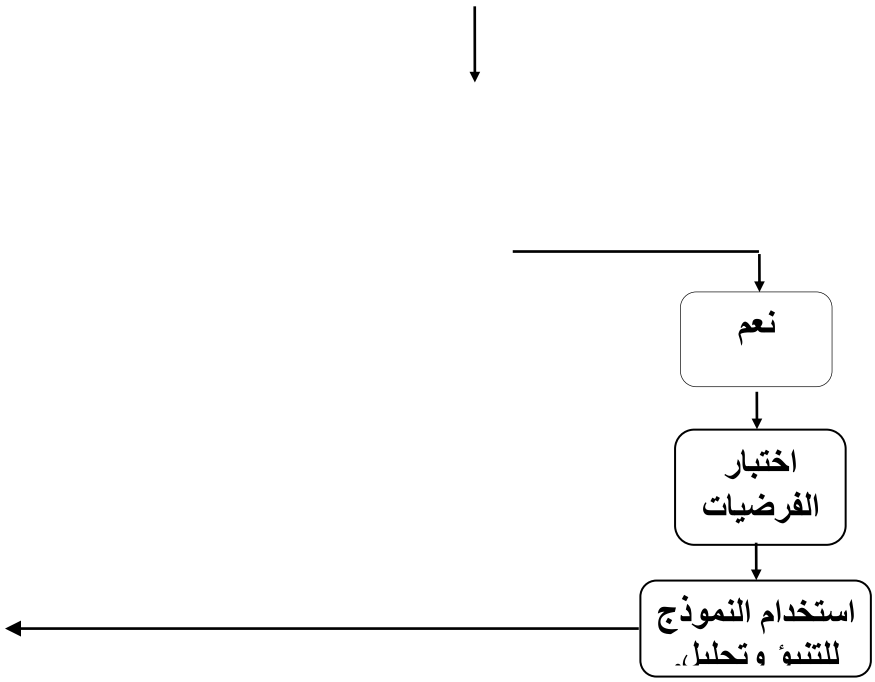
ب- من تحديد النموذج إلى فحص وتقييم النموذج الاقتصادي.

ج- من النموذج القياسي إلى البيانات.

شـــــكل (2-1)

الخطوات التي يتم إتباعها في تحليل القياسي لنموذج اقتصادي:





١–٤: مما يتكون اختبار النظرية الاقتصادية:

الهدف الأساسي للاقتصاد القياسي هو اختبار النظرية الاقتصادية. من المؤشر لنجاح النظرية الاقتصادية توافق إشارة المعاملات المقدرة للنموذج القياسي. والاختبار الأكثر أهميه ماذا كان يعطى تنبؤ اكثر دقه من النظريات الاقتصادية التي تم اقتراحها مسبقا. أي انه يستلزم من الباحث مقارنة النموذج الحالي مع النماذج السابقة. هذه الطريقة لاقت اهتماما كبيرا في السنوات الأخيرة. وسوف يتم النظر بتفصيل في الفصل العاشر.

–٥: خصائص مقدرات المربعات الصغرى العادية (م ص ع):

الخصائص الإحصائي التي تتميز فيها مقدرات المربعات الصغرى العادية.

تتميز المقدرات $\alpha\ \beta$ بثلاث خواص أساسية:

- الخطية.
- عدم التحيز

- الكفاءة

أولاً الخطية: $\hat{\alpha}$ تعتبر داله خطية للعنصر العشوائي التابع Y . أهمية هذه الخاصة أنها تعطينا درجه من البساطة في أجراء الحسابات حيث انه لحساب α β نستعمل المتغير التابع في صوره خطيه فقط هذه لتبسيط الحسابات.

ثانياً: عم التحيز: مقدرات (م ص ع) $\hat{\alpha}$ مقدرة غير متحيزة للمعلمة α . عدم التحيز يتطلب بأن القيمه المتوقعة لـ $\hat{\alpha}$ و التي هي قيمة المعلومة الحقيقية بمعنى آخر متوسط $\hat{\alpha} = \alpha$. إذا جمعت عينات كثيرة وفي كل عينه نحسب $\hat{\alpha}$ يتم أخذ المتوسط. ذلك المتوسط نظريا يجب أن يتساوى مع المعلمة الحقيقية. $E(\hat{\alpha}) = \alpha$ مقدرات (م ص ع) $\hat{\beta}$ مقدرة غير متحيزة للمعلمة β حيث أن $E(\hat{\beta}) = \beta$. أي أن توقع $\hat{\beta}$ يجب أن يساوي المعلم ه الحقيقية بمعنى آخر متوسط قيم $\hat{\beta}$ أو في المتوسط $\hat{\beta}$ تساوي القيمة الحقيقية للمعلمة β. هذه الأوضاع كلها نظريه بحتة في الواقع لا يكون عندنا عدد من العينات، بكون في الواقع عينه واحدة فقط وتعطينا قيمه واحدة $\hat{\alpha}$، قيمه واحدة $\hat{\beta}$ يعتمد عليها في التحليل، من الناحية النظرية نقول أن هذه المقدرات يتوقع أنها تساوي القيمة الحقيقية من الناحية الأخرى القيمة الحقيقة لا نعرفها وبالتالي هذه الخصائص خصائص نظريه بحتة. على الرسم البياني، رسم دالة احتمال $\hat{\beta}$ ، خاصية عدم التحيز تقول أن توزيع احتمال $\hat{\beta}$ يأخذ هذا الشكل يتمركز حول القيمة الحقيقية، لـ β يعني أن القيمة المتوقعة لـ $\hat{\beta}$ تساوي β $E(\hat{\beta}) = \beta$ وأن قيمة β تساوي المعلمة الحقيقية ونفس التحليل ينطبق على α.

$$E(\hat{\alpha}) = \alpha \qquad\qquad E(\hat{\beta}) = \beta$$

تباين المقدرات: تباين اي قيمة تتوزع حول وسط معين هو معدل تشتت هذه القيم عن الوسط

ويكون القانون الخاص بتباين مقدرة القاطع:

$$V(\hat{\alpha}) = E\{\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha})\}^2$$

بإجراء بعض الخطوات يمكن إن نبرهن إن تباين $\hat{\alpha}$ يساوي

$$V(\hat{\alpha}) = \frac{\sigma^2 \sum X^2}{n \sum x^2}$$

من المعادلة نلاحظ إن تباين $\hat{\alpha}$ تعتمد على تباين u فإذا زاد تباين u توقع زيادة تباين $\hat{\alpha}$ لان هناك علاقة طرديه بين تباين $\hat{\alpha}$ وتباين u . وتوجد صيغه أخرى لتباين $\hat{\alpha}$ على انه يساوي :

$$V(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \{\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x^2}\}$$

اما القانون الخاص بتباين $\hat{\beta}$:

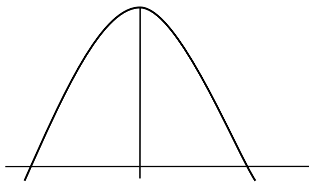
$$V(\hat{\beta}) = \{\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\}^2$$

يمكن إن نثبت إن التباين الخاص بـ $\hat{\beta}$ يساوي $V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum x^2}$

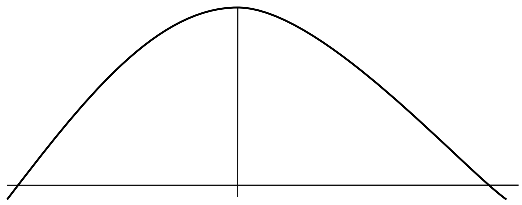
ومن المعادلة نلاحظ إن تباين $\hat{\beta}$ يعتمد طرديا على تباين u وعكسيا على مجموع مربعات انحرافات المتغير المستقل، فكلما ازدادت درجة انتشار المتغير المستقل (آي بيانات X مختلفة كثيرا عن بعضها) نتوقع إن يزيد المكون الموجود في المقام وبالتالي ينخفض تباين $\hat{\beta}$ مما يشعر إلى دقة التقديرات.

<u>ثالثاً: أقل تباين:</u>

الخاصية الثالثة لمقدرات م ص ع تمتلك آدني تباين هذه الخاصية لها أهمية بالغة في الاقتصاد القياسي لان آدني تباين يعتبر مؤشر إلى دقة القياسات، آدني تباين يعتبر مؤشر إلى دقة القياسات، آدني تباين يعني أعلى دقة من ناحية القياسات. هناك علاقة عكسية بين التباين ودقة القياسات كلما زاد التباين كلما انخفضت دقة القياسات وكلما قل ارتفعت دقة القياسات. لأن مقدرات م ص ع $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$ تلك المقدرات تمتلك آدني تباين نعني مقارنه بمقدرات أخرى تقاس بطريقه مختلفة عن م ص ع فان مقدرات م ص ع تمتلك آدني تباين إي تتحلى بأعلى دقه. نفترض إن هناك مقدرات لـ α β تحصل عليها بطريقه مختلفة ونفترض إن المقدرات الأخرى α'', β'' ا ذا افترضنا أن تلك المقدرتين خطيه وغير متحيزة سيكون الاختلاف في خاصية أن مقدرات م ص ع $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$ تمتلك أعلى دقة.



(١)



(٢)

$$E(\hat{\beta}) = \beta \qquad\qquad E(\beta'') = \beta$$

$$V(\hat{\beta}) < V(\beta'')$$

في الحالة (١) استخدمت مقدرات م ص ع . في الحالة الثانية (٢) مقدرات أخرى غير م ص ع ، في الشكل التوزيع الاحتمالي لقيمة المقدرات $\hat{\beta}$, β''. في (١) يتبين ان التباين قليل، درجة الانتشار لـ $\hat{\beta}$ اقل وبالتالي تتمركز قيم $\hat{\beta}$ حول القيمة الحقيقية وفي الشكل (٢) قد نحصل على قيم حول β لكنها بعيده عن المعلمة الحقيقية. من الشكل إن احتمال الحصول على $\hat{\beta}$ أقرب للمعلمة الحقيقية من β'', وبالتالي درجة احتمال العثور على $\hat{\beta}$ أقرب

مما سواها، هذا ما يقصد بخاصية أدنى تباين. من النتائج التي توصلنا أليها عن مقدرات م ص ع يمكن أن نقول أن شــكل التوزيع الاحتمالي الخاص بالمقدرات $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$

$$\hat{\alpha} \sim N\left[\alpha, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x^2}\right)\right], \quad \hat{\beta} \sim N\left[\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right]$$

من المعادلتين يتبين انه :

- كلما زاد التباين σ^2 كلما زاد تباين المقدرات $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$.
- كلما كان انتشار قيم X اكبر كلما قل تباين $\hat{\alpha}$ $\hat{\beta}$.

٢-٣: تقدير نموذج الانحدار باستخدام طريقة المربعات الصغرى:

هناك عدة طرق لتقدير معاملات معادلة الانحدار أهمها

- طريقة المربعات الصغرى.
- طريقة الإمكانية العظمى.

في المرحلة الأولى نفترض وجود الفروض الأساسية لمعالجة النموذج الخطي. وفي المراحل اللاحقة نتعرض للحالات التي تكون فيها هذه الفروض غير صحيحه.

نموذج الانحدار بالافتراضات الأساسية كما يلي:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u$$

هي المعادلة الأساسية التي تصور العلاقة بين التابع والمستقل حيث **i** تعتمد على العينة التي يبلغ حجمها **n** . بالإضافة إلى المعادلة الأساسية نقول أن النموذج يحتوي افتراضات عن المتغير العشوائي.

تقدير النموذج يتم بغرض الحصول على مقدرات معالم نموذج الانحدار البسيط. نموذج الانحدار البسيط يتضمن ثلاث معالم هي، α , معلمة القاطع، β , معلمة الميل، σ^2 معلمة التباين. المراد هو استخدام إحصائيات المتغيرات التابعة والمتغيرات المستقلة حسب الطرق الإحصائيه الملائمة للحصول على مقدرات لهذه المعالم.

٢-٤: طريقة المربعات الصغرى:

تعتمد طريقة المربعات الصغرى العادية على الحصول على مقدرات , الانحدار حيث تمثل αمعلمة القاطع، , β معلمة الميل. بحيث يتم تصغير مجموع مربعات البوا قي إلى آدني قيمه لها. بحيث يجري تعريف مكون يطلق علية مجموع المربعات البوا قي وبعد ذلك يشرع في الحصول على , α، , β بحيث يتم تصغير هذا المكون إلى أدنى قيمه له. وطريقة المربعات الصغرى تعطينا مقدرات الانحدار , α، , β ولكن لا تعطينا مقدرة التباين وهذا يعتبر من نقاط ضعف طريقة المربعات الصغرى.

المعيار الخاص في المربعات الصغرى العادية: النموذج المقدر هو كما يلي

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X + u_i$$

u هي البوا قي والتي تساوي من النموذج $u_i = Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X)$ نموذج الانحدار ممكن أن يمر من خلال انتشــار البيانات الخاصـة بـ X, Y، الخط المقدر هنا هو الذي يعطـي Y المقدرة

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X$$

إذا أخذنا إحداثيات القيم Y,X إحداثيات النقطـة الأولـى تنقسم إلـى قسمين، قسم من المحور الأفقي في النموذج المقدر، هذا عبارة عن $\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X$ الجزء الثاني عبارة عن قيمة البوا قـي. فالمشـاهدة Y هــي حصـيلة جمـع $u + \hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X$ أي أن أي مشـاهده مكونــه مـن جانبين، جانب الخط المقدر والبواقي. البواقي بحكم أنها مقدرة العنصر العشوائي يمكن أن تكون موجبة وممكن أن تكون سالبه وكذلك من الناحية النظرية يمكن أن تساوي الصفر.

للحصــول علــى مقـدرات المربعــات الصــغرى العاديــة يجـب أن نحصــل أولا علــى البــواقي:

$$u_t^2 = (\hat{Y} - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X))^2$$

مجموع مربعات البواقي $= \sum u^2$

$$\sum u_i^2 = \sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X)^2$$

يتم التوصل إلى الخط الذي تكون فيه مجموع مربعات البواقي اصغر ما يمكن [اختيار الخط الذي يدني مجموع مربعات البواقي إلى أصغر ما يمكن]. باستخدام الرياضيات فأن شرط الدرجة الأولـى يتطلب أجراء التفاضل بالنسبة للمجاهيل α β نستخدم التفاضـل الجزئـي وبعد ذلك نساوي المعادلات التي تم أل تحصل عليها بالصفر ثم نطبق المعادلات الآنية للحصول على قيم المقدرات.

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial \hat{\alpha}} = (2)\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X)(-1) = 0$$

$$= (-2)\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X) = 0$$

$\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$ نساوي بالصفر

بادخال المجموع Σ وحيث ان αعدد ثابت فأن n α = Σ α ثم بقسمة المعادلة على n نحصل على مايلي:

$$\sum Y_i - \sum_i \hat{\alpha} - \hat{\beta}\sum_i X = 0$$
$$\sum_i \hat{\alpha} = \sum Y_i - \hat{\beta}\sum_i X$$
$$n\hat{\alpha} = \sum Y_i - \hat{\beta}\sum_i X$$
$$\hat{\alpha} = \frac{\sum Y_i}{n} - \hat{\beta}\frac{\sum_i X}{n}$$
$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X}$$

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial\hat{\beta}} = (2)(\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)(-X)) = 0$$

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial\hat{\beta}} = -2\sum X(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$

$$(\sum X(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$

$$-\sum XY + \sum X\alpha + \sum \beta X^2 = 0$$

نساوي بالصفر

$$\sum XY = \alpha\sum X + \beta\sum X^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\hat{\alpha} + \left(\sum_{i=1}^{n} X^2\right)\hat{\beta} \qquad ٢.٥$$

بالتعويض بقيمة α نحصل على

$$\sum XY = \sum X\left(\frac{\sum Y}{n} - \beta\frac{\sum X}{n}\right) + \beta\sum X^2 \qquad 2.6$$

بالضرب في n

$$n\sum XY = \sum X\sum Y - \beta(\sum X)^2 + \beta\ n\sum X^2$$

$$n\sum XY - \sum X\sum Y = -\beta(\sum X)^2 + \beta\ n\sum X^2$$

$$= \beta\ n\sum X^2 - \beta(\sum X)^2 \qquad ٢.٧$$

$$= \beta\left(n\sum X^2 - (\sum X)^2\right)$$

معادلة ٢.٧ تسمى المعادلات الطبيعية ونستطيع استخراج قيم α β منها

بالتعويض نحصل على
$$\boxed{\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum^{n} X_i \sum Y_t}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X\right)^2} =}$$

من الممكن الحصول على المقدرات باستخدام الانحرافات كما يلي:

$$\sum\ y_i = \sum (Y - \overline{Y})^2 \qquad = \sum Y_i^2 - n\overline{Y}^2$$

$$\sum xy = \sum (X - \overline{X})(Y - \overline{Y}) = \sum XY - n\overline{XY}$$

$$\sum x^2 = \sum (X - \overline{X})^2 \qquad = \sum X^2 - n\overline{X}$$

ولكن

$$\sum Y_i X_i = \sum X_i(\overline{Y}_i - \hat{\beta}\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum Y_i X_i = n\overline{X}(\overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum Y_i X_i = n\overline{X}\,\overline{Y} - \hat{\beta}n\overline{X}\,\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum Y_i X_i - n\overline{X}\,\overline{Y} = -\hat{\beta}n\overline{X}\,\overline{X} + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum XY - n\overline{XY} = -\hat{\beta}n\overline{X}^2 + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum xy = \beta\left[nX^2 - \sum X^2\right]$$

$$\sum xy = \beta\sum x^2$$

$$\beta = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

مثال (١)

X	Y	X^2	x	y	XY	xy	x^2
2	4	4	-2	-4	8	8	4
3	7	9	-1	-1	٢١	1	1
1	3	1	-3	-5	٣	15	9
5	9	25	1	1	٤٥	1	1
9	17	81	5	9	١٥٣	45	25
∑X= 20	**∑Y= 40**	**$\sum X^2$= 120**			**∑XY= 230**	**∑xy=70**	**$\sum x^2$=40**

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum^{n} X_i \sum Y_t}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X\right)^2} =$$

$$\hat{\beta} = \frac{(5)(230)-(20)(40)}{5(120)-(20)^2} = 1.75$$

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X} = 8 - 1.75(4) = 1$$

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X =$$

$$\hat{Y} = 1 + 1.75X$$

باستخدام الانحرافات

$$\hat{\beta} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{70}{40} = 1.75$$

	X	Y	x	y	xy	x^2	XY	X^2
1	١٠٠	٥٥	30	-45	1650	900	5500	10000
2	٩٠	٧٠	20	-30	1400	400	6300	8100
3	٨٠	٩٠	10	-10	900	100	7200	6400
4	٧٠	١٠٠	0	0	0	0	7000	4900
5	٧٠	٩٠	0	-10	0	0	6300	4900
6	٧٠	١٠٥	0	5	0	0	7350	4900
7	٧٠	٨٠	0	-20	0	0	5600	4900
8	٦٥	١١٠	-5	10	-550	25	7150	4225
9	٦٠	١٢٥	-10	25	-1250	100	7500	3600
10	٦٠	١١٥	-10	15	-1150	100	6900	3600
11	٥٥	١٣٠	-15	30	-1950	225	7150	3025
12	٥٠	١٣٠	-20	30	-2600	400	6500	2500

المجموع	840	1200			-3550	2250	80450	61050
	X=70	Y=100						
					β=-3550/2250=-1.6			