التكامل المحدد (المحاضرة الرابعة)

اذا كانت f(x) دالة مستمرة في الفترة [a,b] وكانت F(x) عكس مشتقة f(x) فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

حيث ان a يمثل الحد الأدنى للتكامل و b الحد الأعلى للتكامل.

ملاحظات:

- ✓ قواعد التكامل المحدد هي نفس قواعد التكامل الغير محدد
- ✓ في التكامل المحدد لا نضيف ثابت التكامل
- ✓ بعد تكامل الدالة نعوض عن قيم b,a اي F(b)-F(a)

مثال:

اوجد قيمة كل من التكاملات التالية:

1. $$\int_1^2 (3x^2 + 2x - 2)dx = [\frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 2]_1^2 = [x^3 + x^2 - 2]_1^2$$

$$= [2^3 + 2^2 - 2] - [1^3 + 1^2 - 2] = [8 + 4 - 4] - [1 + 1 - 2] = 8$$

2. $$\int_0^3 \frac{2x}{\sqrt{x^2+16}}dx = \int_0^3 (x^2+16)^{-\frac{1}{2}} 2xdx = 2[(x^2+16)^{\frac{1}{2}}]_0^3$$

$$= [2\sqrt{x^2+16}]_0^3 = [2\sqrt{9+16}] - [\sqrt{(0+16}] = 10 - 8 = 2$$

3. $$\int_4^0 x(x-1)(x-2)dx = -\int_0^4 x(x^2 - 2x - x + 2)dx$$

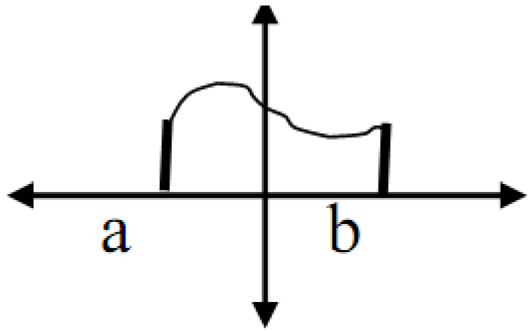
$$= -[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2]_0^4 = -[\frac{4^4}{4} - 4^3 + 4^2] + 0 = -[64 - 64 + 16] = -16$$

تطبيقات على التكامل المحدد

اولاً: المساحة المحددة بمنحني الدالة ومحور x

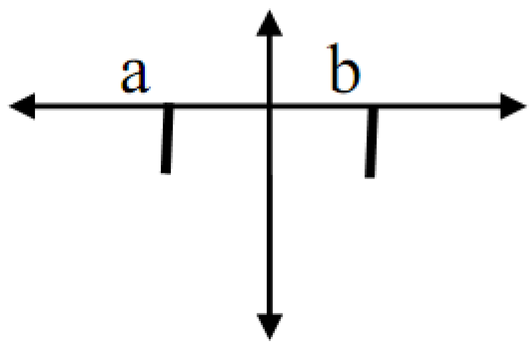
المساحة المحددة لمنحني الدالة y=f(x) ومحور x والمستقيمين x=a،x=b هي:

- عندما يكون $f(x) > 0$ أي ان المنحني فوق محور x فإن المساحة المحددة بالمنحني والمستقيمين والتي يرمز لها بالرمز A هي:



$$A = \int_a^b f(x)dx$$

- عندما يكون $f(x) < 0$ أي ان المنحني تحت محور x فإن المساحة المحددة بالمنحني والمستقيمين والتي يرمز لها بالرمز A هي:



$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

ملاحظات:

- ✓ لايجاد المساحة بين منحني الدالة ومحور السينات نتبع الخطوات التالية:
- ✓ نجد نقاط تقاطع المنحني ومحور السينات وذلك بتعويض عن $y=0$ بالدالة ونجد قيم x
- ✓ نلاحظ قيم x هل تجزء الفترة ام لا تجزئ
- ✓ اذا لم يعطي الفترة في السؤال نجعل قيم x هي الفترة
- ✓ نكون جدول لمعرفة المنحني هل يقع فوق ام تحت محور السينات على كل فترة.

مثال: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^2-2x-3$ ومحور السينات على الفترة $[-1,3]$

الحل:

نجد نقاط التقاطع مع محور السينات أي نجعل y=0 وكما يلي:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3 \ , x = -1$$

الموقع	اشارة الدالة f(x)	$x \in$ للفترة	الفترة
تحت	سالبة	X=0	[-1,3]

$$A = -\int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)dx = [-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x]_{-1}^{3}$$

$$= [-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3*3] - [-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3(-1)] = \frac{32}{3} unit^2$$

مثال: جد المساحة بين منحني الدالة $y = f(x) = \sqrt{(x+1)}$ ومحور السينات والمستقيمين x=3,x=0

الحل:

التقاطع مع محور السينات أي نجعل y=0

$$\sqrt{(x+1)} = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow -1 \notin [0,3]$$

الموقع	اشارة الدالة f(x)	$x \in$ للفترة	الفترة
فوق	موجبة	X=1	[0,3]

$$A = \int_{0}^{3} \sqrt{x+1}\,dx = \int_{0}^{3} (x+1)^{\frac{1}{2}} dx = [\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}]_{0}^{3}$$

$$[\frac{2}{3}\sqrt{(3+1)^3}] - [\frac{2}{3}\sqrt{(0+1)^3}] = \frac{14}{3} unit^2$$