المحاضرة الاولى

الفصل الاول

المتسلسلات اللانهائيه Infinite Series

اذا كانت $\{a_n\}$ متتابعة و $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ فان المتتابعة $\{s_n\}$ تُسمى متسلسلة لانهائية

وبدلاً من $\{s_n\}$ سنستعمل الرمز $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

اذا كان $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ فان المتسلسلة متقاربة والمقدار s يُسمى بمجموع المتسلسلة وفيما عدا ذلك فان المتسلسلة متباعدة .

مثال (١) جد مجموع المتسلسلة $1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^n}$ $\quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ $\quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

الحل:

1. $s_1 = \frac{2}{5}$

$$s_2 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2}$$

$$\vdots$$

$$s_n = \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \cdots + \frac{2}{5^{n-1}} + \frac{2}{5^n} \qquad \cdots (1)$$

بضرب المعادلة الاخيرة بـ $\frac{1}{5}$ نحصل على

$$\frac{1}{5} s_n = \frac{2}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \cdots + \frac{2}{5^{n-1}} + \frac{2}{5^n} + \frac{2}{5^{n+1}} \qquad \cdots (2)$$

بطرح معادلة (2) من معادلة (1) نحصل على

$$s_n - \frac{1}{5} s_n = \frac{2}{5} - \frac{2}{5^{n+1}}$$

$$s_n\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{2}{5^n}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{4}{5} s_n = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{2}{5^n}\right)$$

$$s_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{5^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{5^n}\right) = \frac{1}{2}$$

2. $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}$ $\quad ;n=0\ \rightarrow A=1\ and\ n=-1\ \rightarrow B=-1$

$$\therefore\ \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$\therefore\ s_k=1-\frac{1}{k+1}\ \rightarrow\ \lim_{k\to\infty}s_k=\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=1$$

وعليه فان المتسلسلة متقاربة ومجموعها 1

3. $s_1=-1$

$s_2=-1+1=0$

$s_3=-1+1-1=-1$

مبرهنة : اذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ فان المتسلسلة متباعدة حيث a_n الحد النوني من المتسلسلة

مثال (٢) بيّن ايُّ المتسلسلات التالية متقاربة وايّ منها متباعدة ؟

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+1)(n+2)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\pi$ 7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{5^n}$

الحل :

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1\neq 0$ المتسلسلة متباعدة لان

$2.\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ متقاربة لان

$3.\ \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty \neq 0$ متباعدة

$4.\ \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)} = 0$ متقاربة

$5.\ \lim_{n\to\infty} (-1)^n n = \pm\infty \neq 0$ متباعدة

$6.\ \lim_{n\to\infty} \cos n\pi = \pm 1 \neq 0$ متباعدة

$7.\ \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0$ متباعدة

$8.\ \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n\pi}{5^n} = 0$ متقاربة