الفصل الثالث

النهايات والاتصال

Limits and Continuity

1.3 النهايات (Limits)

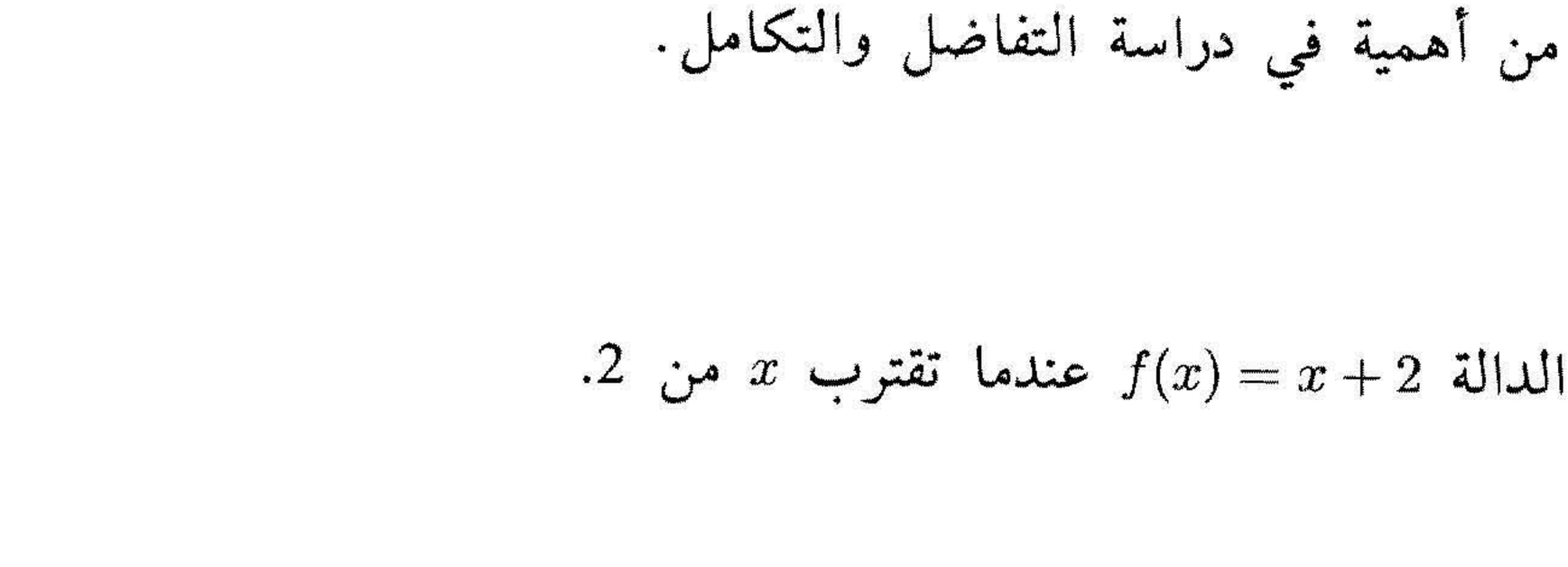
في هذا الفصل ندرس موضوع النهايات، وموضوع الدوال المتصلة لما لهذين الموضوعين من أهمية في دراسة التفاضل والتكامل.

مثال 1

أوجد نهاية الدالة $f(x) = x + 2$ عندما تقترب x من 2.

الحل

عند رسم الدالة $f(x) = x + 2$، نلاحظ أن $x + 2$ تقترب من 4 كلما اقترب x من 2.



الشكل 1.3

والجدول التالي يوضح ذلك:

x	1.9	1.92	1.94	1.96	1.98	2	2.02	2.04	2.06	2.08	2.1
$f(x)$	3.9	3.92	3.94	3.96	3.98	4	4.02	4.04	4.06	4.08	4.1

من ذلك، نستنتج أن نهاية الدالة f تساوي 4 عندما يقترب x من 2. ويكتب ذلك رياضياً

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

مثال 2

أوجد نهاية الدالة $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ عندما يقترب x من 1.

الحل

نلاحظ أن $\sqrt{x}$ يقترب من 1 كلما اقترب x من 1، وأن $1+\sqrt{x}$ يقترب من 2 كلما اقترب x من 1، ولذلك نستنتج أن:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

بصورة عامة، لا نستطيع تحديد نهاية الدالة دائماً بحسابات بسيطة كما رأينا سابقاً؛ لأنه قد تكون هذه الحسابات معقدة وغير واضحة، وقد لا تكون الدالة معرّفة عند النقطة المراد إيجاد النهاية عندها؛ فعلى سبيل المثال لإيجاد $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$، نقوم بالحسابات التالية:

x	1.5	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1	2.5
$\dfrac{x^2-4}{x-2}$	3.5	3.9	3.99	3.999	4.001	4.01	4.1	4.5

ومنها نستطيع تخمين أن قيمة النهاية هي 4.

مثال 3

أوجد $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

الحل

نلاحظ أن x^2-4 و $x-2$ يؤولان إلى الصفر، كلما اقترب x من 2. ومن ذلك يظهر أن

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0}$$

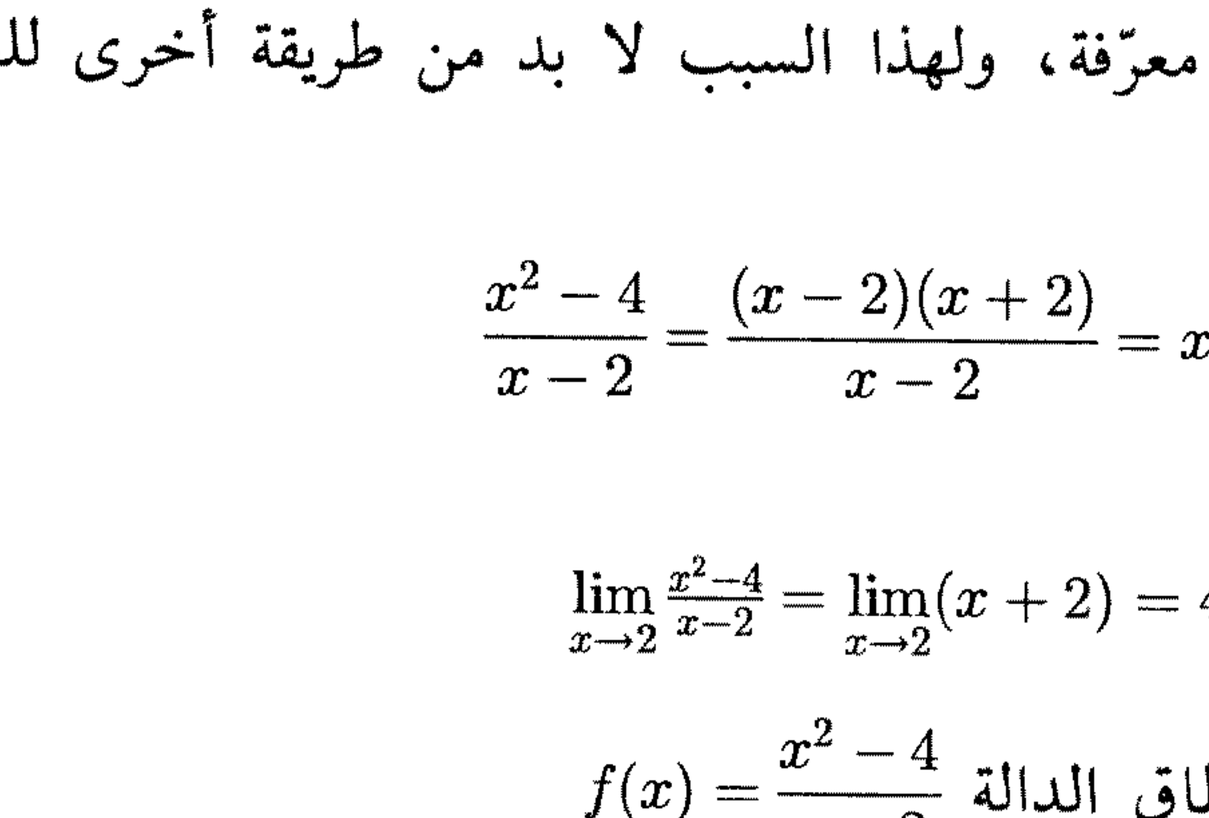
ولكن نعرف أن $\dfrac{0}{0}$ كمية غير معرّفة، ولهذا السبب لا بد من طريقة أخرى للحل. يتبادر إلى الذهن أن:

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$$

عندما $x\neq 2$، وبذلك فإن:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

لاحظ أن 2 لا يوجد في نطاق الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ ولكن $\lim_{x\to 2} f(x)=4$.



الشكل 2.3

مثـــال 4

أوجد $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

الحـــل

عندما التعويض عن $x=1$، نجد أن:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{0}{0}$$

ولكن $\frac{0}{0}$ كمية غير معرّفة.

نحاول طريقة أخرى للحل.

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

إذن:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

من الأمثلة السابقة، نستطيع أن نعطي تعريفاً للنهاية.

تعريف 1.3

نقول إن العدد الحقيقي L نهاية للدالة f، عندما يؤول x إلى a، إذا كانت $f(x)$ تقترب من L، كلما اقترب x من a من الجانب الأيسر والأيمن. ونكتب:

$$\lim_{x\to 2} f(x) == L$$

ملاحظة

الدالة f ليست من الضروري أن تكون معرّفة عند a (a ليس من الضروري أن يكون في نطاق الدالة f)، ولكن f لا بد أن تكون معرّفة حول a (أي في فترة مفتوحة تحتوي على a)، أنظر المثال 3.

مثـال 5

أوجد $\lim_{x\to 4} f(x)$ إذا كانت $f(x)=\frac{1}{2}x-1$

الحـل

من الجدول التالي:

x	3.9	3.99	3.999	4	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	0.95	0.995	0.9995	1	1.0005	1.005	1.05

نستنتج أن: $\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{2}x-1\right)=1$

في هذا المثال نلاحظ ما يلي:

إذا كان $3.9<x<4.1$، فإن $0.95<f(x)<1.05$،

وإذا كان $3.99<x<4.01$، فإن $0.995<f(x)<1.005$،

وإذا كان $3.999<x<4.001$، فإن $0.9995<f(x)<1.0005$.

بعبارة أخرى، إذا كان ε وδ عددين حقيقيين موجبين وصغيرين جداً، فإننا نستنتج مما سبق أنه إذا كان:

$$4-\delta<x<4+\delta \text{ ، فإن } 1-\varepsilon<f(x)<1+\varepsilon$$

في الحالة الأولى $\delta = 0.1$ و $\varepsilon = \delta/2$،

وفي الحالة الثانية $\delta = 0.01$ و $\varepsilon = \delta/2$،

وفي الحالة الثالثة $\delta = 0.001$ و $\varepsilon = \delta/2$،

ويمكن كتابته على الشكل:

إذا كان $-\delta < x - 4 < \delta$ ، فإن $-\varepsilon < f(x) - 1 < \varepsilon$

وهذا يعني أنه إذا كان

$|x - 4| < \delta$ ، فإن $|f(x) - 1| < \varepsilon$

من المثال السابق، نستطيع إعطاء تعريف آخر للنهاية كما يلي:

تعريف 2.3

التعبير $\lim_{x \to a} f(x) = L$ يعني أنه لكل $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta > 0$، حيث أنه إذا كان $0 < |x - a| < \delta$، فإن $|f(x) - L < \varepsilon$.

مثـال 6

أوضح أن $\lim_{x \to 4} \frac{7x - 2}{2} = 13$.

الحـل

لكل $\varepsilon > 0$، نحاول إيجاد $\delta > 0$، حيث أنه إذا كان $0 < |x - a| < \delta$، فإن $|f(x) - L| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{7x-2}{2}-13\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{7x-2-26}{2}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{7(x-4)}{2}\right|<\varepsilon$$

أو $|x-4|<\frac{2}{7}\varepsilon$

فإذا كان $\delta=\frac{2}{7}\varepsilon$، فإن:

$|x-4|<\delta$ يؤدي إلى أن $\left|\frac{7x-2}{2}-13\right|<\varepsilon$

في كل الأمثلة السابقة، استخدمنا كلمة الاقتراب من x، ولكن لم يتوضّح بعد: هل هذا الاقتراب من اليمين، أم من جهة اليسار. عند مناقشة موضوع ما، نحاول الابتعاد عن الالتباس، ومن هذه الأشياء موضوع النهاية، فمن أساسيات هذا الموضوع أن نهاية الدالة وحيدة.

المثال التالي يوضح هذه الفكرة.

مثـــال 7

أوجد $\lim_{x\to 0} f(x)$ إذا كانت:

$$f(x)=\begin{cases}1 & , \quad x\geq 0\\ 0 & , \quad x<0\end{cases}$$

الحـــل

إذا اقترب x إلى الصفر من جهة اليمين، نرى أن:

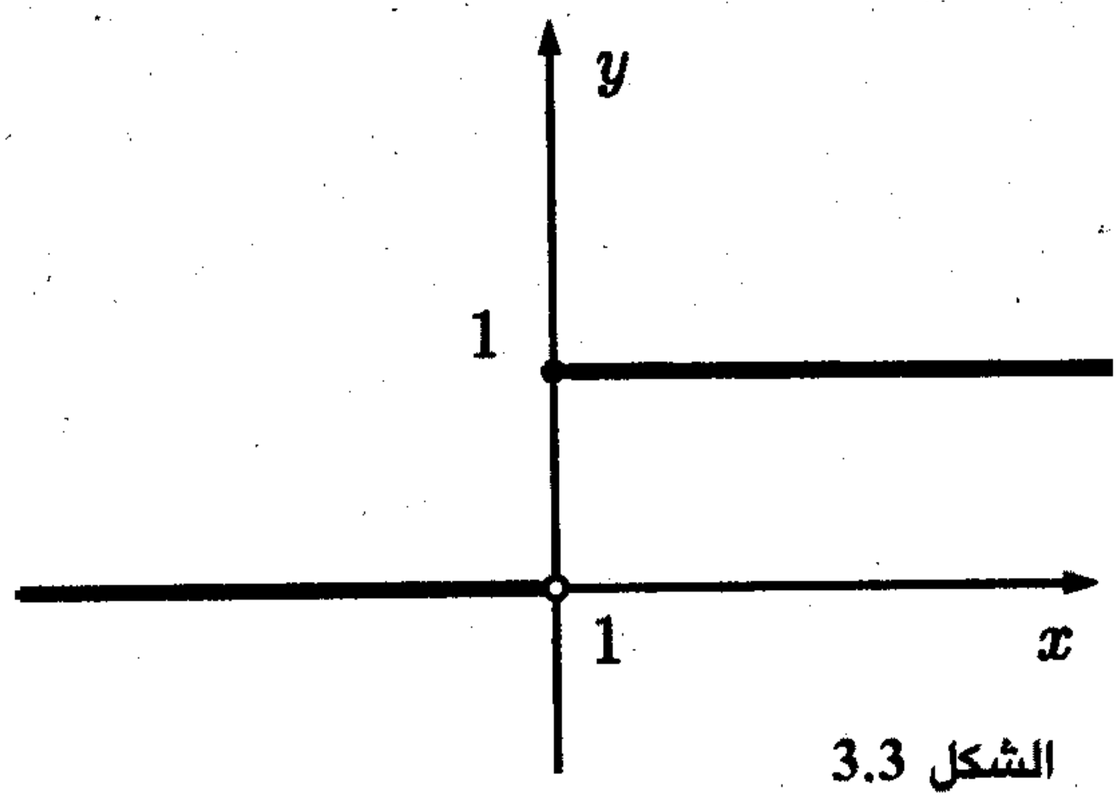
$$\lim_{x\to 0} f(x)=1$$

وإذا اقترب x إلى الصفر من جهة اليسار، نرى أن:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

وبالتالي، فإن $\lim_{x\to 0} f(x)$ ليست وحيدة.

في هذه الحالة، نقول بأن نهاية الدالة غير موجودة، عندما يقترب x إلى الصفر.



الشكل 3.3

تعريف 3.3

لنفرض أن L عدد حقيقي:

1) نقول إن L نهاية يمنى للدالة f، عندما يؤول x إلى a من الجانب الأيمن إذا كانت $f(x)$ تقترب إلى L كلما اقترب x إلى a من الجانب الأيمن. نكتب

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

هذا يعني أن لكل $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta > 0$، حيث أن $a < x < a+\delta$، يؤدي إلى $|f(x) - L| < \varepsilon$.

2) نقول إن L نهاية يسرى للدالة f، عندما يؤول x إلى a من الجانب الأيسر إذا كانت $f(x)$ تقترب إلى L كلما اقترب x إلى a من الجانب الأيسر.

نكتب $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

هذا يعني أن لكل $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta > 0$، حيث أن $a - \delta < x < a$، يؤدي إلى $|f(x) - L| < \varepsilon$.

الرمز $x \to a^+$ يعني أن قيمة x تكون أكبر من a، والرمز $x \to a^-$ يعني أن قيمة x تكون أصغر من a.

لكي تكون نهاية الدالة موجودة، فلا بد أن تكون النهاية اليمنى والنهاية اليسرى متساويتين:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

مثال 8

إذا كانت $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$، أوجد $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ ، $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ ، $\lim_{x \to 1} f(x)$.

الحل

من تعريف القيمة المطلقة، نجد أن:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & , \quad x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & , \quad x-1 < 0 \end{cases}$$

أو

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & , \quad x \geq 1 \\ -(x-1) & , \quad x < 1 \end{cases}$$

إذن:

$$\frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 1 & , \quad x \geq 1 \\ -1 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

وبذلك فإن:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = 1$$

و

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = -1$$

ومما سبق، نستنتج أن النهاية:

$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ **غير موجودة.**

تمارين 1.3

في التمارين من 1 إلى 10، أوجد النهاية المعطاة (يفضّل الاستعانة بالرسم كلما أمكن ذلك).

(1 $\lim_{x\to 2} 3x$

(2 $\lim_{x\to 1}(3x-4)$

(3 $\lim_{x\to 3} \frac{2}{x}$

(4 $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

(5 $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2}$

(6 $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$

(7 $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x}{x}$

(8 $\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{3-x^2}{\sqrt{3}-x}$

(9 $\lim_{x\to 4}(2x-5)$

(10 $\lim_{x\to 2}|x-2|$

(11 $\lim_{x\to 5^+} \frac{|x^2-25|}{x^2-25}$

(12 $\lim_{x\to -2^+} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{-x-1}}{\sqrt{x+2}}$

(13 $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n-x^n}{h}$ عندما يكون n عدداً صحيحاً موجباً.

14) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+4}}$

15) إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<0 \\ x^2 & , \quad 0\le x<2 \\ 4 & , \quad x\ge 2 \end{cases}$$

أوجد

أ) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ب) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ ج) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ د) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$.

2.3 طرق إيجاد النهايات

نعطي في هذا البند بعض الطرق لإيجاد النهايات حتى يسهل علينا إيجاد نهاية معظم الدوال المعروفة.

1) إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة الحدود على الشكل:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

حيث $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ أعداد حقيقية، و n عدد صحيح موجب، فإن:

$$\lim_{x \to b} f(x) = a_0 + a_1b + a_2b^2 + ... + a_nb^n$$

مثـال 9

إذا كانت $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5$، أوجد $\lim_{x \to 1} f(x)$

الحـل

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1^4 - 2.1^3 + 5 = 1 - 2 + 5 = 4 .$$

نتيجة

إذا كانت $f(x)$ دالة ثابتة، أي أن $f(x)$ تساوي عدداً ثابتاً مهما تغير x، فإن نهايتها هي ذلك العدد الثابت.

على سبيل المثال إذا كانت $f(x) = 5$، فإن $\lim_{x \to a} f(x) = 5$.

2) إذا كانت $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة، وكان c عدداً حقيقياً، فإن:

$$\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$$

مثـال 10

أوجد $\lim_{x\to 2} 6(x^2 - x + 3)$.

الحـل

$$\lim_{x\to 2} 6(x^2 - x + 3) = 6 \lim_{x\to 2}(x^2 - x + 3)$$

$$= 6(2^2 - 2 + 3) = 6(5) = 30$$

3) لنفرض أن $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ موجدتان، فإن:

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

أي أن نهاية جمع أو طرح دالتين تساوي جمع أو طرح نهايتيهما.

مثـال 11

إذا كانت $f(x) = x^3 - 5$ و $g(x) = x + 2$، أوجد: $\lim_{x\to 2}[f(x) + g(x)]$

الحـل

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x^3 - 5) = 2^3 - 5 = 3$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2}(x + 2) = 2 + 2 = 4$$

إذن

$$\lim_{x\to 2}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x) = 3 + 4 = 7$$

4) إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودتين، فإن:

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

أي أن نهاية حاصل ضرب دالتين تساوي حاصل ضرب نهايتيهما.

مثـال 12

أوجد $\lim_{x\to 1}(x+1)(x-4)$.

الحـل

$$\lim_{x\to 1}(x+1)=2 \quad , \quad \lim_{x\to 1}(x-4)=-3$$

إذن

$$\lim_{x\to 1}(x-4)(x+1)=\lim_{x\to 1}(x-4).\lim_{x\to 1}(x+1)=2(-3)=-6$$

5) إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to a} g(x)$ موجودتين و $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$، فإن:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

بعبارة أخرى: أن نهاية خارج قسمة دالتين تساوي خارج قسمة نهايتيهما.

مثـال 13

أوجد $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+3}{x^2-3x+1}$.

الحـل

$$\lim_{x\to 0}(x^3-x^2+3)=3 \ , \ \lim_{x\to 0}(x^2-3x+1)=1$$

إذن

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+3}{x^2-3x+1}=\frac{\lim_{x\to 0}(x^3-x^2+3)}{\lim_{x\to 0}(x^2-3x+1}=\frac{3}{1}=3$$

6) إذا تمّ التعويض المباشر وحصلنا على $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{0}{0}$ فلا بد من إجراء عمليات جبرية.

مثـــال 14

أوجد $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

الحـــل

بالتعويض المباشر نجد أن:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

إذن لا بد من عملية جبرية

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x+1$$

إذن

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

مثـــال 15

أوجد $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

الحـــل

عند التعويض المباشر نجد أن:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{0}{0}$$

إذن لا بد من عملية جبرية

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

نظرية 1

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) > 0$، فإن هناك فترة مفتوحة تحتوي على a حيث $f(x) > 0$ لكل x في تلك الفترة.

البرهان

لنفرض أن $\lim_{x\to a} f(x) = L$، من الفرض نجد أن $L > 0$ ومن ذلك يوجد $\delta > 0$ حيث أنه إذا كان $|x-a| < \delta$، فإن $|f(x) - L1 < \varepsilon$.

وهذا يعني أنه إذا كان $x \in (a-\delta, a+\delta)$، فإن $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

لاحظ أن الفترة المفتوحة التي تحتوي على a هي $(a-\delta, a+\delta)$، ومن الفرض $L > 0$ نستنتج أن $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ يحتوي على الأعداد الموجبة فقط (باختيار أي $\varepsilon < L$)، وهذا يعني أن $f(x) > 0$ على الفترة $(a-\delta, a+\delta)$.

وبالطريقة نفسها، يمكن برهنة النظرية التالية:

نظرية 2

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) < 0$، فإن هناك فترة مفتوحة تحتوي على a حيث $f(x) < 0$ لكل x في تلك الفترة.

مثـال 16

أوجد $\lim_{x\to 8}\frac{x^{\frac{4}{3}}}{3}$.

الحـل

$$\lim_{x\to 8}\frac{x^{\frac{4}{3}}}{3}=\frac{(8)^{\frac{4}{3}}}{3}=\frac{[(8)^{\frac{1}{3}}]^4}{3}=\frac{16}{3}$$

نظرية 3

إذا كان $g(x)\le h(x)\le f(x)$، لكل x في فترة مفتوحة تحتوي على a وإذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=L$، فإن $\lim_{x\to a} h(x)=L$.

البرهان

$\lim_{x\to a} f(x)=L$ تعني أنه لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta_1>0$، حيث أن

$|x-a|<\delta_1$ يؤدي إلى أن $|f(x)-L|<\varepsilon$

كذلك $\lim_{x\to a} g(x)=L$ تعني أنه لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta_2>0$، حيث أن

$|x-a|<\delta_2$ يؤدي إلى أن $|g(x)-L|<\varepsilon$.

نأخذ $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$، أي أن δ تكون الأصغر من δ_1,δ_2.

إذا كان $|x-a|<\delta$، فإن $f(x)$، $g(x)$ كليهما بين $L+\varepsilon$، $L-\varepsilon$، ولكن $f(x)\le h(x)\le g(x)$ يعطينا أن $L-\varepsilon<h(x)<L+\varepsilon$، ومعنى ذلك أن $-\varepsilon<h(x)-L<\varepsilon$ أو $|h(x)-L|<\varepsilon$.

وهذا يعني أن:

$$\lim_{x\to a} h(x)=L$$

نظرية 4

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{x}=1$$

البرهان

بالتعويض المباشر عن $x=0$، نجد أن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}$$

ونعرف جيداً أن $\frac{0}{0}$ كمية غير معرّفة.

في الشكل 4.3 دائرة نصف قطرها 1.

مساحة المثلث ODB = نصف القاعدة في الارتفاع

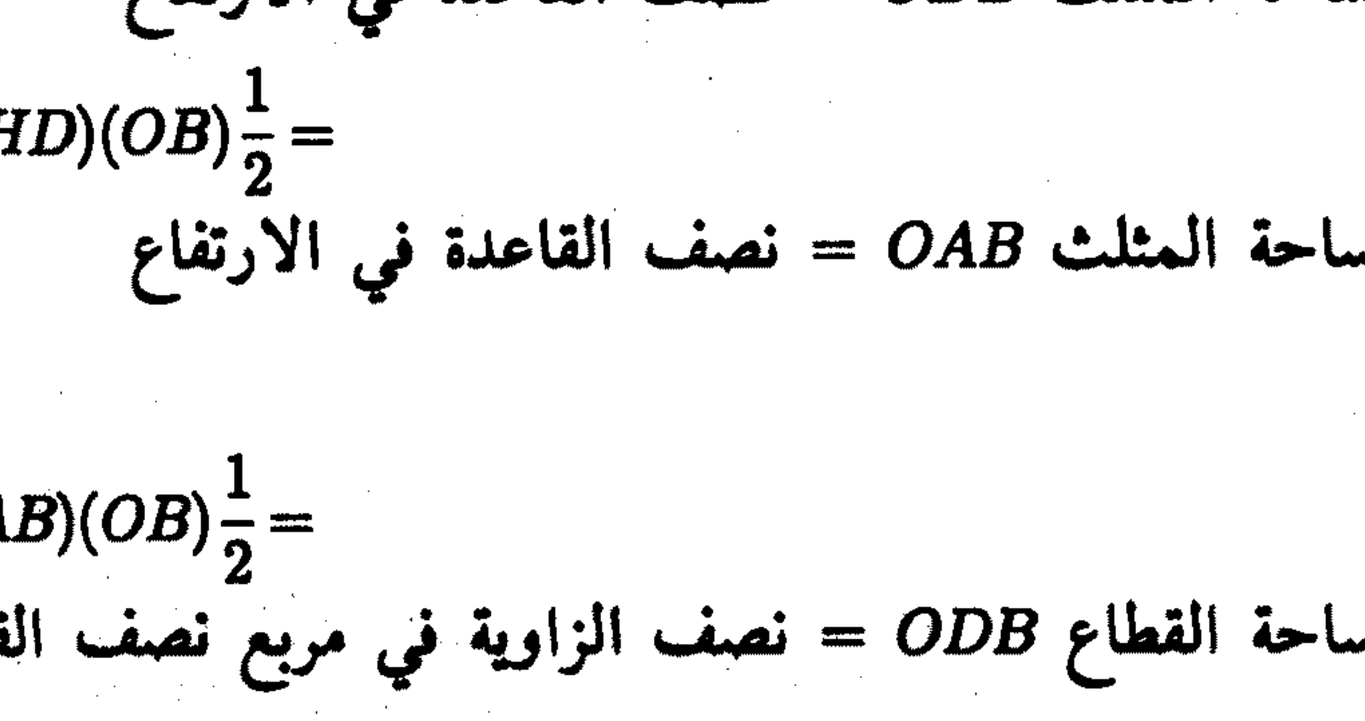
$$\frac{\sin x}{2}=(\sin x)(1)\frac{1}{2}=(HD)(OB)\frac{1}{2}=$$

مساحة المثلث OAB = نصف القاعدة في الارتفاع

$$\frac{\tan x}{2}=\tan x(1)\frac{1}{2}=(AB)(OB)\frac{1}{2}=$$

مساحة القطاع ODB = نصف الزاوية في مربع نصف القطر

$$\frac{x}{2}=(1)(x)\frac{1}{2}=$$



الشكل 4.3

من الشكل نلاحظ أن:

مساحة المثلث $ODB \geq$ مساحة القطاع $ODB \geq$ مساحة المثلث OAB

$$\frac{\tan x}{2} > \frac{x}{2} > \frac{\sin x}{2}$$

وبافتراض أن $0 < x \leq \pi/2$، نجد أن:

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$$

إذن

$$\lim_{x\to 0} 1 \geq \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x\to 0} \cos x$$

$$1 \geq \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \geq 1$$

وهذا يؤدي إلى أن:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

مثـال 17

احسب $\lim_{\varphi\to 0} \frac{\sin 2\varphi}{\varphi}$.

الحـل

$$\lim_{\varphi\to 0} \frac{\sin 2\varphi}{\varphi} = \lim_{\varphi\to 0} \frac{2\sin 2\varphi}{2\varphi} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}$$

بما أن $\varphi \to 0$، فإن $2\varphi \to 0$

$$\lim_{\varphi\to 0} \frac{\sin 2\varphi}{\varphi} = 2\lim_{\varphi\to 0} \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi} = 2(1) = 2$$

إذن

$$\lim_{\varphi\to 0} \frac{\sin 2\varphi}{\varphi} = 2$$

نظرية 5

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{\cos \varphi - 1}{\varphi} = 0$$

البرهان

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{\cos \varphi - 1}{\varphi} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{(\cos \varphi - 1)(\cos \varphi + 1)}{\varphi(\cos \varphi + 1)}$$

$$= \lim_{\varphi \to 0} \frac{\cos^2 \varphi - 1}{\varphi(\cos \varphi + 1)} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{-\sin^2 \varphi}{\varphi(\cos \varphi + 1)}$$

$$= \lim_{\varphi \to 0} \frac{-\sin \varphi}{\varphi} \cdot \lim_{\varphi \to 0} \frac{\sin}{\cos \varphi + 1}$$

$$= -\lim_{\varphi \to 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cdot \frac{\lim_{\varphi \to 0} \sin \varphi}{\lim_{\varphi \to 0}(\cos \varphi + 1)} = -1 \cdot \frac{0}{2} = 0$$

تمارين 2.3

في التمارين من 1 إلى 39، أوجد النهايات المعطاة مستخدماً طرق هذا البند.

1) $\lim_{x \to 1} 4$

2) $\lim_{x \to 0} \pi x$

3) $\lim_{x \to 3} x(2x - 1)$

4) $\lim_{x \to -2} (5 - 3x - x^2)$

5) $\lim_{x \to 1} \frac{3x + 2}{2x + 5}$

6) $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x + 1}$

7) $\lim_{x \to \frac{4}{3}} \sqrt{\frac{9x^2 - 64}{3x - 8}}$

8) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

(9 $\lim_{x\to -2} \frac{x^3-5x}{x+3}$

(10 $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5}$

(11 $\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{1-x}$

(12 $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(13 $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$

(14 $\lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1}$

(15 $\lim_{x\to 2^+} [x]$

(16 $\lim_{x\to 2^-} [x]$

(17 $\lim_{x\to n^+} [x]$

(18 $\lim_{x\to n^-} [x]$

(19 $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\sin x}$

(20 $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+4x-3}{x^2-1}$

(21 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \cos x\sin x}{x^2}$

(22 $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sin(x-3)}$

(23 $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(4x)}{2x}$

(24 $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(3x)}$

(25 $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+5x+1}{3x^5-9x+2}$

(26 $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}$

(27 $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2-1}$

(28 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

(29 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$

(30 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x/2)}{x}$

(31 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(4x)}{x}$

(32 $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{x}$

(33 $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)-1}{x^4}$

(34 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{\sin(5x^2)}$

(35 $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{3\sin^2(2x)}$

(36 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ ، $ab \neq 0$

37) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3(2x)}{x^2}$

38) $\lim_{x\to -3}\left|\frac{x^2+4x+3}{x+3}\right|$

39) $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sin(x-3)}$

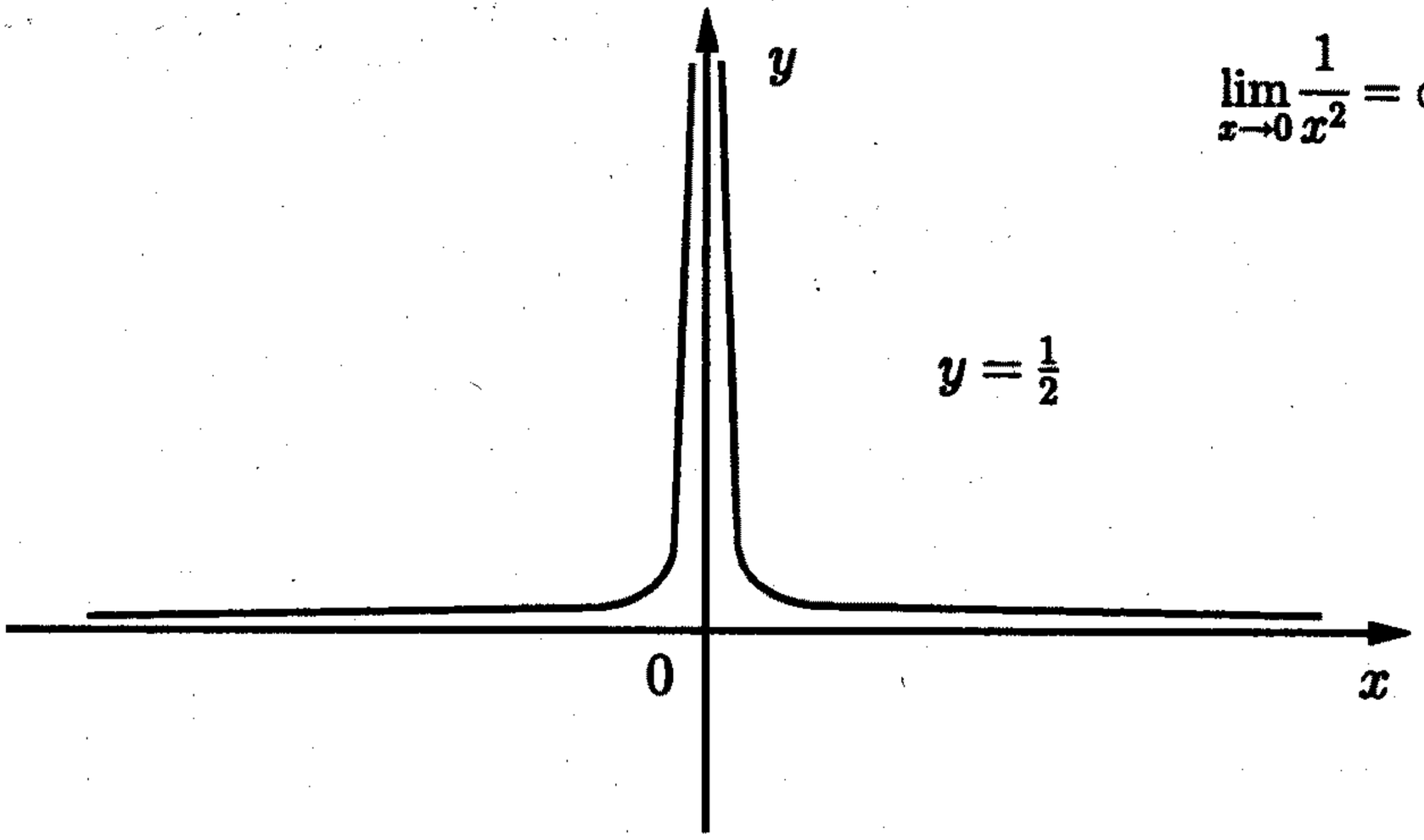
40) أوجد $\lim_{x\to 2} f(x)$، إذا كان

$$f(x)=\begin{cases}|x| & , \quad x\le 2\\ [x] & , \quad x>2\end{cases}$$

3.3 مالانهاية النهاية (Infinite Limit)

عندما نحاول إيجاد نهاية الدالة $\frac{1}{x^2}$، عندما يقترب x من الصفر، نجد أن $\frac{1}{x^2}$ تكبر دون حد أعلى.

أي أن: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$



الشكل 5.3

نؤكد هنا أن ∞ هي إشارة على سلوك الدالة، وليست رقماً على خط الأعداد.

تعريف 4.3

إذا كانت $f(x)$ تكبر دون حد أعلى في الاتجاه الموجب، عندما يؤول x إلى a من كلا الجانبين، فإننا نقول إن $f(x)$ تقترب إلى ما لانهاية عندما يؤول x إلى a. ونكتب $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$

إذا كانت $f(x)$ تصغر دون حد أدنى في الاتجاه السالب، عندما يؤول x إلى a من كلا الجانبين، فإننا نقول إن $f(x)=$ تقترب إلى سالب مالانهاية عندما يؤول x إلى a. ونكتب $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$

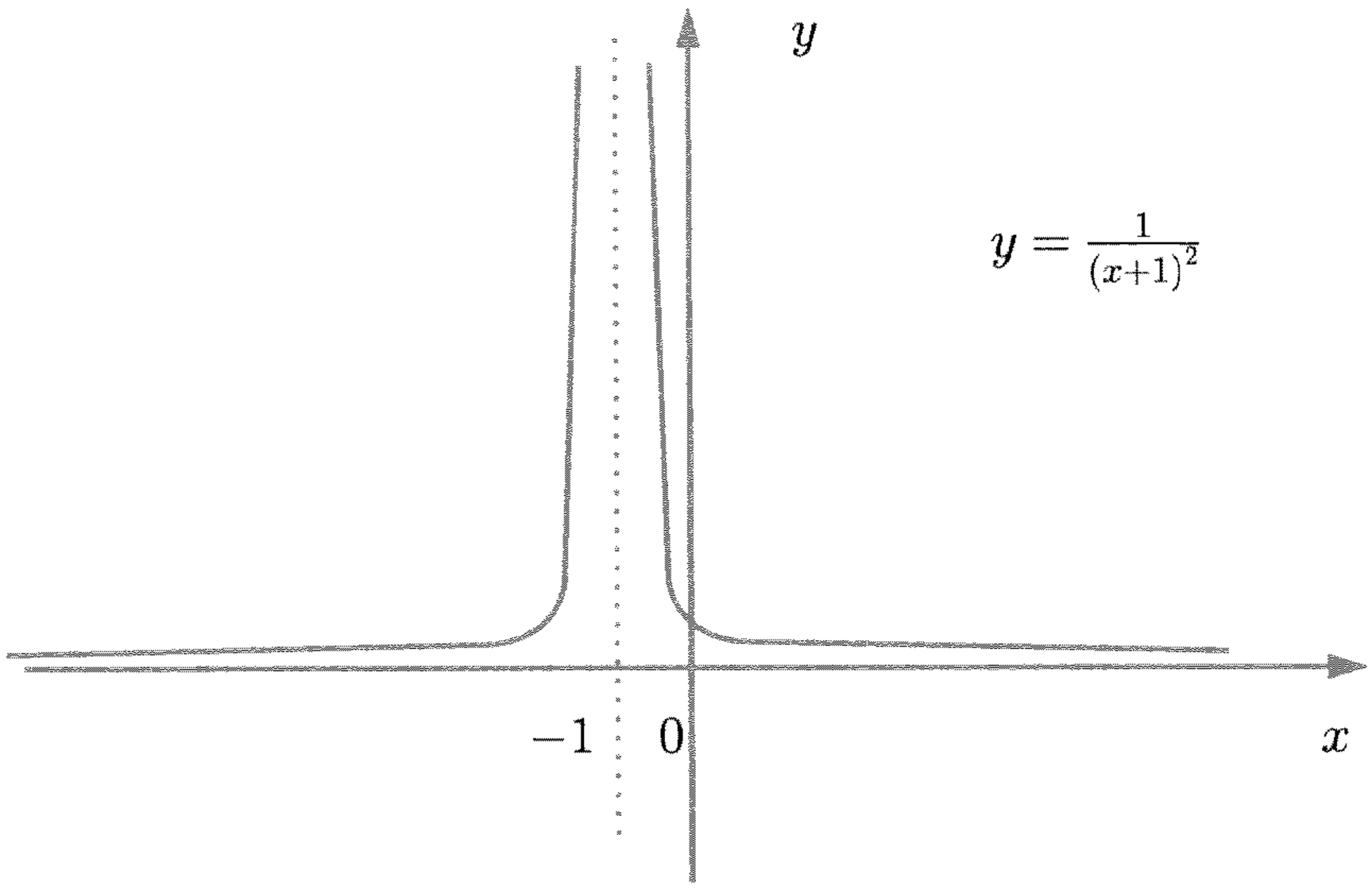
مثـال 18

احسب $\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)^2}$.

الحـل

نلاحظ أنه عندما يؤول x إلى -1 من الجانبين، فإن $\frac{1}{(x+1)^2}$ تكبر دون حد أعلى.

إذن $\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)^2}=\infty$



الشكل 6.3

مثـال 19

أوجد $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ إن وجدت.

الحـل

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$ و $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

إذن $\frac{1}{x}$ ليس لها نهاية عندما $x\to 0$ لأن:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\neq\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}$$

تمارين 3.3

احسب النهاية المعطاة في كل حالة من الحالات التالية:

(1 $\lim_{x\to -\frac{1}{3}} \frac{5x}{3x+1}$

(2 $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}$

(3 $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}$

(4 $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2-2}$

(5 $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3}$

(6 $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+1}{x-2}$

(7 $\lim_{x\to 2^-} \frac{[x-2]}{2-x}$

(8 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan x$

(9 $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x+1}{x-2}$

(10 $\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x^2-2}$

(11 $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$

(12 $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{1-\sqrt{x^2+1}}$

(13 $\lim_{x\to 2} \frac{|4-x|}{x^2-8x+16}$

(14 $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{6x^2+7x-5}{2x-1}$

(15 $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-9}{x^2+x-2}$

(16 $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-9}{x^2+x-2}$

(17 أوجد

أ) $\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2+1}{x(2x-3)}$

ب) $\lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2+1}{x(2x-3)}$

ج) $\lim_{x\to (3/2)^+} \frac{2x^2+1}{x(2x-3)}$

د) $\lim_{x\to (3/2)^-} \frac{2x^2+1}{x(2x-3)}$

18) أوجد

أ) $\lim_{x\to 0^-} \frac{3x^2-1}{2x^2-7x}$ ب) $\lim_{x\to (7/2)^+} \frac{3x^2-1}{2x^2-7x}$

19) أوجد

أ) $\lim_{x\to 0^-} \left(x^2-\frac{1}{x}\right)$ ب) $\lim_{x\to 0^+} \left(x^2-\frac{1}{x}\right)$

20) أوجد $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt[3]{25-x^2}}{5-x}$.

4.3 النهاية عند المالانهاية (Limit at Infinity)

1) عندما تؤول الدالة $f(x)$ إلى العدد الحقيقي L، عندما يؤول x إلى مالانهاية، نقول إن نهاية الدالة $f(x)$ تساوي العدد L، عندما يؤول x إلى ∞، ونكتب في هذه الحالة كالتالي: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

2) عندما تؤول الدالة $f(x)$ إلى العدد الحقيقي L، عندما يؤول x إلى سالب مالانهاية، نقول إن نهاية الدالة $f(x)$ تساوي L، عندما يؤول x إلى $-\infty$، ونكتب في هذه الحالة كالتالي: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

مثـــال 20

أوجد $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}$.

الحـــل

نلاحظ أنه كلما كبر x، صغرت الدالة $\frac{1}{x^2}$، وبذلك فإن: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$.
أنظر الشكل 5.3.

ملاحظة: في حالة الدالة القياسية، فإن إيجاد النهاية عندما $x \to \pm\infty$ يتم بقسمة البسط والمقام على أكبر أس للمتغير x يظهر في الدالة.

مثـــال 21

أوجد $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x+6}{x^5+2x^2+9}$

الحـــل

بقسمة البسط والمقام على x^5، نجد أن:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x+6}{x^5+2x^2+9} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3+3x+6}{x^5}}{\frac{x^5+2x^2+9}{x^5}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}+\frac{6}{x^5}}{1+\frac{2}{x^3}+\frac{9}{x^5}}$$

$$= \frac{0+0+0}{1+0+0} = 0$$

مثـال 22

أوجد $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{3x+2}$

الحـل

بقسمة عناصر البسط والمقام على x، ينتج:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{3x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{3+\frac{2}{x}}$$

$$= \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

قاعدة

لنفرض أن: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

و $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$

إذا كانت $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$، فإن:

$$\lim_{x\to\pm\infty} R(x) = \begin{cases} \pm\infty & , \quad n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & , \quad n = m \\ 0 & , \quad n < m \end{cases}$$

تمارين 4.3

احسب النهاية في كل حالة من الحالات التالية:

(1 $\lim_{x\to\infty} \frac{1+6x}{-2+x}$

(2 $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-7x+3}{3x^2+5x+1}$

(3 $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-5x^2}{x}$

(4 $\lim_{x\to\infty} \frac{-2}{(x-1)^2}$

(5 $\lim_{x\to\infty} \left(3x-2+\frac{1}{x^2+1}\right)$

(6 $\lim_{x\to\infty} (x^2-\frac{1}{x})$

(7 $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{2-3x^2}$

(8 $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}$

(9 $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+1}{x-1}$

(10 $\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x^2-9}$

(11 $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2+4}}{x+5}$

(12 $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{3+x}{x}}$

(13 $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^3+7}}{2x+3}$

(14 $\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{2+4x^3}}$

(15 $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\sqrt{3-x}}$

5.3 الاتصال (Continuity)

لبعض الدوال سلوك متوقع، فمثلاً هناك دوال إذا عرف سلوكها عند x في نطاقها، فقد نستطيع أن نتوقع قيمة الدالة عند أي نقطة في نطاقها تكون قريبة من x.

هذا النوع من الدوال يسمى الدوال المتصلة.

تعريف 5.3 (الدالة المتصلة)

الدالة f تكون متصلة عند النقطة a إذا تحققت الشروط الآتية:

1) $f(a)$ قيمة محددة، أي أن الدالة f معرّفة عند a.

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجودة.

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

نقول إن الدالة f متصلة على نطاقها، إذا كانت f متصلة عند كل نقطة في نطاقها.

إذا كانت الدالة f غير متصلة عند a، فإننا نقول إن الدالة f منقطعة عند النقطة a

تعريف 6.3

الدالة f تكون متصلة على الفترة المفتوحة (a,b)، إذا كانت متصلة عند كل نقطة من نقط الفترة (a,b)