المحاضرة الخامسة

مثال: جد المساحة المحددة بالدالة $y=f(x)=x^3-x$ ومحور السينات.

الحل:

التقاطع مع محور السينات أي نجعل y=0

$$x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x(x-1)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow x=0 \, or \, x=1 \, or \, x=-1$$

اذا الفترات تصبح [-1,0],[0,1]

الفترة	$x \in$ للفترة	اشارة الدالة f(x)	الموقع
[-1,0]	X=-1/2	موجبة	فوق
[0,1]	X=1/2	سالبة	تحت

$$A=A_1+A_2=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}-(x^3-x)dx$$

$$=[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}]_{-1}^{0}+[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}]_{0}^{1}=\frac{1}{2}unit^2$$

مثال: جد المساحة المحددة بين منحني الدالة $y=f(x)=x^3-4x$ ومحور السينات والمستقيمين x=2,x=-2

تقاطع المنحني مع محور السينات وذلك بجعل y = 0

$x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow x(x^2 - 4) = 0$

$x(x-2)(x+2) = 0$

$x = 0$ or $x = 2$ or $x = -2$ [-2 , 2]

الفترات تصبح [-2 ,0] , [0 , 2]

الفترة	للفترة x	اشارة الدالة f(x)	
[-2 , 0]	x = -1	$(-1)^3 - 4(-1) = 3 > 0$	فوق
[0 , 2]	x = 1	$(1)^3 - 4(1) = -3 < 0$	تحت

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx + \int_{0}^{2} -(x^3 - 4x)dx$$

$$= [\frac{x^4}{4} - 2x^2]_{-2}^{0} + [-\frac{x^4}{4} + 2x^2]_{0}^{2}$$

$$= [0] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2\right] + \left[\frac{-(2)^4}{4} + 2(2)^2\right] - [0]$$

$$= -[4 - 8] + [-4 + 8] = 4 + 4 = 8unit^2$$

مثال: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y=f(x)=x^4-x^2$ ومحور السينات على الفترة [-1,1]

الحل:

$x^4 - x^2 = 0 \Longrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$

$x = 0$ or $x = 1$ or $x = -1$ [-1 , 1]

الفترات تصبح [-1 ,0] , [0 , 1]

الفترة	للفترة x	اشارة الدالة f(x)	الموقع
[-1 , 0]	$x = \frac{-1}{2}$	$(\frac{-1}{2})^4 - (\frac{-1}{2})^2 = \frac{-3}{16} < 0$	تحت
[0 , 1]	$x = \frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2})^4 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{-3}{16} < 0$	تحت

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-1}^{0} -(x^4 - x^2)dx + \int_{0}^{1} -(x^4 - x^2)dx$$

$$= [-\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}]_{-1}^{0} + [-\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}]_{0}^{1}$$

$$= [0] - \left[-\frac{(-1)^5}{5} + \frac{(-1)^3}{3}\right] + \left[-\frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3}\right] - [0] = -\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right] + \left[-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right]$$

$$= \left(-\frac{3}{15} + \frac{5}{15}\right) + \left(-\frac{3}{15} + \frac{5}{15}\right) = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$$

مثال: جد المساحة المحددة بين منحني الدالتين $y=f(x)=x, y=f(x)=x^3$

الحل:

$$R(x) = f(x) - g(x)$$

$$R(x) = x - x^3$$

$$x - x^3 = 0 \implies x(1 - x^2) = 0$$

$$x - x^3 = 0 \implies x(1 - x^2) = 0$$

$$x(1 - x)(1 + x) = 0$$

$x = 0$ or $x = 1$ or $x = -1$

الفترات تصبح $[-1, 0], [0, 1]$

الفترات تصبح $[-1, 0], [0, 1]$

الفترة	x للفترة	اشارة الدالة f(x)	
$[-1, 0]$	$x = -1/2$	$\frac{-1}{2} - (\frac{-1}{2})^3 = \frac{-3}{8} < 0$	تحت
$[0, 1]$	$x = 1/2$	$\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8} > 0$	فوق

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-1}^{0} -(x - x^3)dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)dx$$

$$= [-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}]_{-1}^{0} + [\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}]_{0}^{1} = [0] - [-\frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^4}{4}] + \left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4}\right] - [0]$$

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-1}^{0} -(x - x^3)dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)dx$$

$$= [-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}]_{-1}^{0} + [\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}]_{0}^{1} = [0] - [-\frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^4}{4}] + \left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4}\right] - [0]$$

$$= -\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right] = -\left(\frac{-1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} unit^2$$