- **<u>تمرين 1</u>**

**باستخدام طريقة لاغرانج أوجد كثيرة الحدود الموافقة للتابع $y = f(x)$ المعطى بالجدول التالي:**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 2 | 3 | -1 | 4 |
| $y$ | 1 | 2 | 3 | 4 |

**<u>الحل:</u>**

**نلاحظ أن $n = 3$ وبالتالي كثيرة الحدود الملائمة تعطى بالعلاقة التالية:**

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i L_i(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$$

**لذلك نوجد** $L_0,\ L_1, L_2, L_3$

$$L_0(X) = \frac{(x-3)(x+1)(x-4)}{(-1)(3)(-2)} = \frac{1}{6}(x-3)(x+1)(x-4)$$

$$L_1(X) = \frac{(x-2)(x+1)(x-4)}{(1)(4)(-1)} = \frac{1}{4}(x-2)(x+1)(x-4)$$

$$L_2(X) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(-3)(-4)(-5)} = -\frac{1}{60}(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$L_3(X) = \frac{(x-2)(x-3)(x+1)}{(2)(1)(5)} = \frac{1}{10}(x-2)(x-3)(x+1)$$

**نعوض في $P_3$ فنجد:**

$$P_3(x) = \frac{1}{6}(x-3)(x+1)(x-4) - \frac{1}{2}(x-2)(x+1)(x-4)$$
$$-\frac{1}{20}(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{2}{5}(x-2)(x-3)(x+1) = \ldots$$

**<u>تمرين 2</u>**

**ليكن لدينا التابع $y = f(x)$ المعطى بالجدول التالي:**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y$ | 1 | 2 | 4 | 8 |

**والمطلوب أوجد كثيرة الحدود الموافقة لهذا التابع باستخدام طريقة الفروق المقسومة.**

**<u>الحل:</u>**

**لنشكل جدول الفروق المقسومة**

| $x$ | $y$ | $Dy$ | $Dy^2$ | $Dy^3$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | |
| | | 1 | | |
| 1 | 2 | | $\frac{1}{2}$ | |
| | | 2 | | $\frac{1}{6}$ |
| 2 | 4 | | 1 | |
| | | 4 | | |
| 3 | 8 | | | |

**وبالتالي كثيرة الحدود الملائمة تعطى بالعلاقة التالية:**

$$P_3\,(\,x\,) = \; y_0 \;+\; Dy_0(x - x_0) + \; D2(x - x0)(x - x_1) +$$
$$+\,D3\;y_0\;(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$= 1 + (x - \;0) + \frac{1}{2}(x - 0)(x - 1) + \frac{1}{6}(\,x - 0)(x - 1\,)(x \;\; - \;2\,)$$
$$= 1 \;+\; x \;+ \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}x \;+ \frac{1}{6}\;x(\,x^2 - 3\,x + 2\,)$$
$$= \frac{1}{6}\;x^3 \;+ \frac{5}{6}\;x \;+\; 1$$

- **<u>تمرين 3</u>**

**ليكن لدينا التابع** $y = f\,(\,x\,)$ **المعطى بالجدول التالي:**

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | **2** | **5** | **3** | **7** |

- **والمطلوب:**

**١- أوجد جدول الفروق التقدمية لهذا التابع.**

**٢- أوجد كثيرة الحدود نيوتن غريغوري التقدمية الملائمة لهذا التابع.**

**٣- أوجد $P_2(x)$ الملائمة ثم احسب $f\,(\,4\,)$ واحسب قيمة الخطأ المرتكب.**

**<u>الحل:</u>**

**نوجد جدول الفروق التقدمية:**

| $x$ | $y$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | | | |
| | | 3 | | |
| 1 | 5 | | -5 | |
| | | -2 | | 11 |
| 2 | 3 | | 6 | |
| | | 4 | | |
| 3 | 7 | | | |

**وبالتالي كثيرة حدود نيوتن غريغوري التقدمية الملائمة تعطى بالعلاقة:**

$$P_3(x) = y_0 + s.\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}.s(s-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{5!}.s(s-1)(s-2)$$

**حيث:**

$$s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x-0}{1} = x \quad ; \quad h = x_{i+1} - x_i = 1$$

$$P_3(x) = 2 + 3x + \frac{(-5)}{2}.x(x-1) + \frac{11}{6}.x(x-1)(x-2) =$$

$$= \quad 2 + 3x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{11}{6}x(x^2 - 3x + 2) =$$

$$= \quad \frac{11}{6}x^3 - 8x^2 + \frac{55}{6}x + 2$$

**أما كثيرة الحدود الملائمة $P_2(x)$ فنحذف الحد** $\frac{\Delta^3 y_0}{5!}.\,s(s-1)(s-2)$ **من علاقة** $P_3(x)$ **فنجد أن :**

$$P_3(x) = 2 + 3x + \frac{(-5)}{2}.x(x-1) =$$

$$= \quad 2 + 3x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x =$$

$$= \quad -\frac{5}{2}x^2 + \frac{11}{2}x + 2$$

وبالتالي $f(4)$ تكون بالشكل التالي:

$$F\ (4) = P2\ (4) = -\frac{5}{2}\ (4)^2\ + \frac{11}{2}\ (4) +\ 2\ = -\ 40\ +\ 22\ +\ 2\ =\ -16$$

أما الخطأ المرتكب فهو:

$$e(x) = \frac{\Delta^3 y_0}{5!} . s(s-1)(s-2) = \quad ; \quad s = \frac{4-0}{1} = 4$$

$$= \frac{11}{6} 4(4-1)(4-2) = \frac{11}{6}(4)(3)(2) = 44$$

- <u>تمرين 4</u>

أوجد كثيرة الحدود الموافقة للتابع السابق باستخدام طريقة نيوتن غريغوري التراجعية.

<u>الحل:</u>

| x | $y$ | $\nabla y$ | $\nabla^2 y$ | $\nabla^3 y$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | | | |
| | | 3 | | |
| 1 | 5 | | -5 | |
| | | -2 | | 11 |
| 2 | 3 | | 6 | |
| | | 4 | | |
| 3 | 7 | | | |

نلاحظ أن:

$$h = x_{i+1} - x_i = 1 \quad ; \quad u = \frac{x - x_n}{h} = \frac{x-3}{1} = (x-3)$$

وبالتالي كثيرة حدود نيوتن غريغوري التراجعية تعطى بالعلاقة:

$$P_3(x) = \nabla y_{3.u} + \frac{\nabla^2 y_3}{2!}.u(u+1) + \frac{\nabla^3 y_3}{3!}.u(u+1)(u+2) =$$

$$= 7 + 4(x-3) + \frac{6}{2}(x-3)(x-2) + \frac{11}{6}(x-3)(x-2)(x-1) =$$

$$= 7 + 4x - 12 + 3x^2 - 15x + 18 + \frac{11}{6}x^3 - 11x^2 + \frac{121}{6}x - 11 =$$

$$= \frac{11}{6}x^3 - 8x^2 + \frac{55}{6}x + 2$$

**نلاحظ أن كثيرة الحدود الناتجة هي نفس كثيرة الحدود المعطاة في المثال السابق.**

- **<u>تمرين</u>**

**ليكن لدينا التابع $y = f(x)$ المعطى بالجدول التالي:**

| $x$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 23 | 93 | 259 | 569 | 1071 | 1831 |

**والمطلوب أوجد قيمة التابع y في النقطة 11.9 وذلك بطريقة نيوتن غريغوري التراجعية.**

**<u>الحل:</u>**

**لنشكل جدول الفروق التراجعية للتابع y فنجد:**

| $x$ | $y$ | $\nabla y$ | $\nabla^2 y$ | $\nabla^3 y$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 23 | | | |
| | | 70 | | |
| 4 | 93 | | 96 | |
| | | 166 | | 48 |
| 6 | 259 | | 144 | |
| | | 310 | | 48 |
| 8 | 569 | | 192 | |
| | | 502 | | 48 |
| 10 | 1071 | | 340 | |
| | | 742 | | |
| 12 | 1813 | | | |

**نلاحظ أن** $h = 1$ **وان**

$$u = \frac{x - x_n}{h} = \frac{11.9 - 12}{1} = -0.1$$

**وبالتالي حسب صيغة نيوتن غريغوري التراجعية نجد أن:**

$$y = P(11.9) = y_n + \nabla y_n . u + \frac{\nabla^2 y_n}{2!} . u . (u+1) + \frac{\nabla^3 y_n}{3!} . u . (u+1)(u+2)$$

**لان** $\Delta^4 y = 0$ **( لاحظ الجدول )**

**وبالتالي:**

$$P\,(\,11.9\,) = 1813 + 742\,(\,-0.1\,) + \frac{340}{2!}\,(-0.1)(-0.1+1)$$
$$+\ \frac{48}{3!}\,(-0.1+1)(-0.1+2)(-0.1) = \ ....$$

- **<u>تمرين</u>**

**أوجد الجذر التقريبي للمعادلة :**

$$F(x) = x^3 - 9x + 1 = 0$$

**والموجود ضمن المجال** $[\,2\,,4\,]$ **بطريقة تنصيف المجال متخذاً** $\varepsilon = 0.035$

**الحل :**

**لدينا**

$$F\,(\,4\,) = 29,\ \ F\,(\,2\,) = -9$$

**إذا يوجد ضمن المجال** $[\,2\,,4\,]$ **جذر للمعادلة** $\boldsymbol{F\,(\,x\,) = 0}$ **لنوجد**

$$\bar{x} = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$F(\bar{x}) = F(3) = 1 \Rightarrow F(a).F(\bar{x}) = (-9).(1) = -9 < 0$$
$$\Rightarrow b = \bar{x} = 3 \Rightarrow [\,a, b\,] = [2, 3\,]$$
$$|a - b| = 1 > \varepsilon$$

**إذا نعين** $\bar{x}$ **من جديد:**

$$\bar{x} = \frac{2+3}{2} = 2.5$$

$$F(\bar{x}) = F(2.5) = -5.875 \Longrightarrow F(a).F(\bar{x}) = (-9)(-5.875) = 52.875 > 0$$
$$\Rightarrow a = \bar{x} = 2.5 \Rightarrow [a, b] = [2.5, 3]$$
$$|a - b| > \varepsilon$$

إذا نعين $\bar{x}$ من جديد:

$$\bar{x} = \frac{2.5+3}{2} = 2.75$$

$$F(x) = F(2.75) = -2.953125 \Rightarrow F(a).F(x) = (-9)(-2.953125) = 26.578125 > 0$$
$$\Rightarrow a = x = 2.75 \Rightarrow [a,b] = [2.75, 3]$$
$$|a-b| > \varepsilon$$

إذا نعين $\bar{x}$ من جديد:

$$\bar{x} = \frac{2.75+3}{2} = 2.875$$

$$F(\bar{x}) = F(2.875) = -1.111328125 \Rightarrow F(a).F(\bar{x}) = (-9)(-1.111328125)$$
$$= 10.001953125 > 0$$
$$\Rightarrow a = \bar{x} = 2.875 \Rightarrow [a,b] = [2.875, 3]$$
$$|a-b| > \varepsilon$$

إذا نعين $\bar{x}$ من جديد:

$$\bar{x} = \frac{2.875+3}{2} = 2.9375$$

$$F(\bar{x}) = F(2.9375) = 0.090087890625 \Rightarrow F(a).F(\bar{x}) = (-9)(0.090087890625)$$
$$= 0.810791 < 0$$
$$\Rightarrow b = \bar{x} = 2.9375 \Rightarrow [a,b] = [2.875 ,2.9375]$$
$$|a-b| > \varepsilon$$

إذا نعين $\bar{x}$ من جديد:

$$\bar{x} = \frac{2.875+2.9375}{2} = 2.90625$$

$$F(x) = F(2.90625) = 0.609222412 \Rightarrow F(a).F(x)$$
$$= (0.090087890625)(0.609222412) > 0$$
$$\Rightarrow a = x = 2.90625 \Rightarrow [a,b] = [2.90625 ,2.9375]$$
$$|a-b| = 0.03125 < \varepsilon$$

إذا نعين $\bar{x}$ من جديد:

$$\bar{x} = \frac{2.90625+2.9375}{2} = 2.921875$$

$$F(\bar{x}) = F(2.921875) = 0.3517952 \Rightarrow F(a).F(\bar{x}) > 0$$
$$\Rightarrow a = \bar{x} = 2.921875 \Rightarrow [a,b] = [2.921875,2.9375 ]$$
$$|a-b| = 0.015625 < \varepsilon$$

**وهكذا نكرر العملية 15 مرة فنحصل على الجذر التقريبي**

$x = 2.921875$

- <u>تمرين</u>

**أوجد الجذر التقريبي للمعادلة :**

$F(x) = x^3 - x - 10 = 0$

**بطريقة نيوتن رافسون**

**متخذا** $\varepsilon = 0.5$ و $x_0 = 4$

**الحل:**

$F(x) = x^3 - x - 10$
$F'(x) = 3x^2 - 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} = 4 - \frac{50}{47} = 2.9361703$$

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)} = 2.9361703 - \frac{12.376836}{24.863288} = 2.4383748$$

**وبالتالي فان:**

$| x_2 - x_1| = 0.4977955 < \varepsilon$

**إذا الجذر التقريبي هو**

$\boldsymbol{x_2 = 2.4383748}$

- <u>تمرين</u>

**اعتمادا على طريقة القواطع أوجد الجذر التقريبي للمعادلة:**

$$\boldsymbol{F(x) = \sin x - \frac{x}{2} = 0}$$

**والموجود في المجال:**

$$[a,b] = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

**<u>الحل:</u>**

**من الدستور التالي**

$$\bar{x} = a - \frac{b-a}{F(b)-F(a)}.F(a)$$

**نجد أن :**

$$\bar{x} = 1.7596$$

**ولكن لدينا**

$$F(a) = 1 - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{3.14}{4} > 0$$

$\Rightarrow F(a).F(b) > 0$

$a = x = 1.75960$

**ويصبح المجال الجديد** $[a, b] = [1.75960, 3.14]$

**وهكذا بعد تكرار العملية ١٣ مرة نحصل على الجذر التقريبي:**

$$\bar{x} = 1.89549$$

- **تمرين**

**لتكن لدينا المعادلة**

$$F(x) = 2\cos x - e^{x} = 0$$

**والمطلوب :**

**إيجاد الجذر التقريبي للمعادلة السابقة ضمن المجال [ 0.6 , 0.5 ] وبدقة** $\varepsilon = 0.002$

١) **بطريقة تنصيف المجال.**

٢) **بطريقة نيوتن رافسون.**

٣) **بطريقة القاطع.**

٤) **بطريقة هالي.**

**متخذا**

**الحل:**

١) **طريق تنصيف المجال:**

**لدينا** $a = 0.5 \quad , \quad b = 0.6$

$F(a) = F(0.5) = 0.10644 \qquad , \qquad F(b) = F(0.6) = -0.17145$

$$\bar{x} = \frac{0.5 + 0.6}{2} = 0.55$$

$F(\bar{x}) = F(0.55) = -0.02820$

**نلاحظ أن :**

$F(a).F(\bar{x}) < 0$

**وبالتالي:**

$[a, b] = [0.5, 0.55]$

ولكن $|a-b| > \varepsilon$

**لنوجد منتصف المجال من جديد فنجد :**

$$\bar{x} = \frac{0.5+0.55}{2} = 0.525$$

$F(\bar{x}) = F(0.525) = 0.04019$

**نلاحظ أن :**

$F(a).F(x) > 0$

**وبالتالي:** $[a,b] = [0.525, 0.55]$

**ولكن** $|a-b| > \varepsilon$

**لنوجد منتصف المجال من جديد فنجد :**

$$\bar{x} = \frac{0.525+0.55}{2} = 0.5375$$

$F(\bar{x}) = F(0.5375) = 0.00626$

**نلاحظ أن :**

$F(a).F(\bar{x}) > 0$

**وبالتالي:**

$[a,b] = [0.5375, 0.55]$

**ولكن** $|a-b| > \varepsilon$

**لنوجد منتصف المجال من جديد فنجد :**

$$\bar{x} = \frac{0.5375+0.55}{2} = 0.54375$$

$F(x) = F(0.54375) = -0.01090$

**نلاحظ أن :**

$F(a).F(\bar{x}) < 0$

**وبالتالي:**

$[a,b] = [0.5375, 0.54375]$

**ولكن** $|a-b| > \varepsilon$

**لنوجد منتصف المجال من جديد فنجد :**

$$\bar{x} = \frac{0.5375+0.54375}{2} = 0.54063$$

$F(\bar{x}) = F(0.54063) = -0.00232$

نلاحظ أن :

$F(a).F(\bar{x}) < 0$

وبالتالي:

$[a\,, b] = [0.5375, 0.54063]$

ولكن $|a - b| > \varepsilon$

لنوجد منتصف المجال من جديد فنجد :

$$\bar{x} = \frac{0.5375 + 0.54063}{2} = 0.53907$$

$F(\bar{x}) = F(0.53907) = 0.00196$

نلاحظ أن :

$F(a).F(\bar{x}) > 0$

وبالتالي:

$[a, b] = [0.53907, 0.54063]$

ولكن $|\,a - b\,| > \varepsilon$

لنوجد منتصف المجال من جديد فنجد :

$$\bar{x} = \frac{0.53907 + 0.54063}{2} = 0.53985$$

$F(\bar{x}) = F(0.53985) = -0.00018$

نلاحظ أن :

$F(a).F(\bar{x}) < 0$

وبالتالي:

$[a, b] = [0.53907, 0.53985]$

ولكن $|a - b| = 0.00078 > \varepsilon$

اذا الجذر التقريبي هو:

$$\bar{x} = 0.53985$$

٢) <u>طريقة نيوتن رافسون:</u>

نحسب أولا مشتق التابع فنجد:

$F'(x) = -2\sin x - e^{x}$

**نعتمد القيمة التقريبية $x_0 = 0.5$ للجذر فنجد:**

$F(x_0) = 0.10644$
$F'(x_0) = -2.60757$

**نطبق العلاقة:**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

$x_1 = 0.540082$
$F(x_1) = -0.000732$
$F'(x_1) = -2.744457$

$x_2 = 0.539785$
$F(x_2) = 0.00000000442$

**وبذلك يكون الجذر المطلوب**

$$x_2 = 0.539785$$

**٣) <u>طريقة القاطع:</u>**

**لدينا:**

$a = 0.5 \quad , \quad F(a) = 0.10644$
$b = 0.6 \quad , \quad F(b) = -0.17145$

$$\bar{x} = a - \frac{b-a}{F(b)-F(a)}.F(a) = 0.5385$$

$F(\bar{x}) = 0.00352$

**لدينا** $F(a).F(x) > 0$ **إذا المجال الجديد يصبح** $[0.5385, 0.6]$

$a = 0.5385 \qquad F(a) = 0.00352$
$b = 0.6 \qquad F(b) = -0.17145$

$$\bar{x} = 0.53978$$

$F(\bar{x}) = 0.00010$

**لدينا** $F(a).F(x) > 0$

**إذا المجال الجديد يصبح** $[0.53975, 0.6]$

$a = 0.53975 \qquad F(a) = 0.00010$
$b = 0.6 \qquad F(b) = -\ 0.17145$

$$\bar{x} = 0.53978$$

$F(x) = 0.00001$

**إذا يمكننا أن نعتمد الجذر التقريبي** $\bar{x} = 0.53978$

**٤) <u>طريقة هالي:</u>**

**لدينا:**

$$F(x) = 2\cos x - e^{x}$$
$$F'(x) = -2\sin x - e^{x}$$
$$F''(x) = -\ 2\cos x - e^{x}$$

**باعتماد $x_0 = 0.5$ وبالتعويض في دستور هالي نجد :**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n) - \dfrac{F''(x_n)}{2F'(x_n)}.F(x_n)}$$

$x_1 = 0.53976$
$F(x_1) = 0.000069$

**وبالتالي يكون الجذر التقريبي هو :**

$$\boldsymbol{x_1 = 0.53976}$$