### 3.5.3. اختبار جودة التوفيق

كلما كانت المشاهدات اقرب الى خط الانحدار أي (كلما صغرت البواقي) كلما زاد التغير في Y الذي تفسره معادلة الانحدار المقدرة حيث

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{e}_i$$

$$y_i - \bar{y} = (\hat{y}_i - \bar{y}) + \hat{e}_i$$

وبتربيع كل حد في طرفي المعادلة ، وجمعها بالنسبة لكل i نجد

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum \hat{e}_i^2$$

---

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum (\hat{y} - \bar{y})^2 + \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$$

حيث

$\sum(y_i - \bar{y})^2$: مجموع مربعات الانحرافات الكلية (التغير الإجمالي في y) TSS Total Sum of Squares

$\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2$: مجموع مربعات الانحدار (التغير المفسر في y) ESS Explained Sum of Squares

$\sum(y_i - \hat{y}_i)^2$: مجموع مربعات الخطاء (تغيير البواقي) RSS Residual Sum of Squares

ومنه $TSS = ESS + RSS$

بقسمة المعادلة على TSS

$$1 = \frac{ESS}{TSS} + \frac{RSS}{TSS}$$

ومن هنا يمكن ان نعرف معامل التحديد $R^2$ بأنه نسبة التغير الإجمالي في y المفسر بـ x

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

او

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

حيث ان $0 < R^2 < 1$

- **معامل الارتباط:**

تسمى r معامل الارتباط $r = \sqrt{R^2}$ حيث ان $-1 < r < 1$

يقيس معامل الارتباط درجة الاقتران بين متغيرين x و y وليس درجة تفسير x لـ y .اذ ان علاقة الارتباط لا تعني بالضرورة وجود علاقة سببية بين x و y بل توضح منحى (اتجاه) المتغيرين ان وجدت العلاقة بينهما. فإذا كانت r=-1 فذلك دلالة على العلاقة العكسية التامة بين x و y واذا كان r=1 فذلك دلالة على العلاقة الطردية التامة بين x و y

**4.5.3. اختبار جودة النموذج (اختبار فيشر F) وتحليل التباين:**

اختبار F هو اختبار لجودة النموذج. يحاول أن يجيب على السؤال هل افلح النموذج في تفسير التغيرات التي تحدث في المتغير التابع. ويختبر الفرضية إن معاملات المتغيرات المفسرة تساوي الصفر. أي أن فرضية العدم تقول انه لا يوجد علاقة بين المتغيرات المفسرة والمتغير التابع. وتقارن قيمة المحسوبة من الجدول مع الجد وليه بدرجة حرية للبسط تساوي k-1 ودرجة حرية المقام n-k. قيمة الجد وليه عند مستوى معنوية λ .

لإجراء هذا الاختبار نحسب قيمة $F_{cal}$ او نقارنها بـ F المجدولة

$$F_c = \frac{R^2/k-1}{(1-R^2)/n-k}$$

في حالة الانحدار البسيط

$$F_c = \frac{R^2}{(1-R^2)/n-k}$$

أما F المجدولة فهي $F_{tab}=F_{\lambda(k-1;n-k)}$

اذا كانت $F_c>F_{tab}$ فإننا نرفض فرضية عدم قبول النموذج أي نقبل النموذج

اذا كانت $F_c<F_{tab}$ فإننا نقبل فرضية عدم قبول النموذج أي نرفض النموذج

كما يمكن حساب الإحصائية من خلال جدول تحليل التباين

- **جدول تحليل التباين لمعادلة الانحدار ANOVA :** وهو إن تحليل مجموع المربعات الصغرى إلي مجموع مربعات البواقي ومجموع مربعات الانحدار. الغرض من هذا التحليل لاختبار معنوية

مجموع مربعات الانحدار وهذا أيضا يدخل في اختبار معنوية المعامل b.  ونمثل هذا التحليل في جدول تحليل التباين:

**الجدول (1.3): جدول تحليل التباين ANOVA**

| التباين | مجموع المربعات | درجة الحرية | متوسط المربعات |
|---|---|---|---|
| مجموع مربعات الانحدار | $RSS = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2$ | k-1=2-1 | RSS/1 |
| مجموع مربعات البواقي | $ESS = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2$ | n-k=n-2 | SSE/(n-2) |
| مجموع مربعات الإجمالي | $TSS = \sum(y_i - \bar{y})^2$ | n-2=3 | $F = \frac{RSS}{ESS / n-k}$ |

### 6.3. بناء مجالات الثقة لمعالم الانحدار

تقدم هذه المجالات مجالا للقيم التي يمكن أن تأخذها معالم الانحدار الحقيقية. حيث نضع مع كل مجال ثقة نضع مستوى احصائي للمعنوية. فبوجود مستوى المعنوية تشكل هذه المجالات. حيث أن احتمال احتواء المجال المذكور على معلمة الانحدار الحقيقية يكون 1 مطروحا منه مستوى المعنوية $(1-\lambda)$ وتستعمل هذه المجالات لاختبار الفرضيات الإحصائية حول معنوية معالم الانحدار المقدرة.

لتقدير مجال الثقة لأي معلمة نكتب القانون الخاص بهذه المعلمة:

$$t_c = t_{n-2} = \frac{\hat{a} - a}{se_{\hat{a}}}$$

وعند مستوى المعنوية $\lambda$ يكون مجال الثقة $(1-\lambda)$ ونجد من جدول توزيع t القيمة المحسوبة $\mp t_{n-2\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$ وهذا معناه ان احتمال وجود الاحصائية t ما بين $\mp t_{n-2\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$ يكتب على الشكل

$$p\left[-t_{n-2\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \le \frac{\hat{a} - a}{se_{\hat{a}}} \le +t_{n-2\left(\frac{\lambda}{2}\right)}\right] = 1 - \lambda$$

وان ضربنا (داخل الاحتمال كل الاطراف بواسطة $-se\hat{a}$ واضفنا $\hat{a}$ لأطراف المتراجحة نجد

$$P\left[\hat{a} - se_{\hat{a}}t_{n-2\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \le a \le \hat{a} + se_{\hat{a}}t_{n-2\left(\frac{\lambda}{2}\right)}\right] = 1 - \lambda$$

يعد تحليل الانحدار طريقة إحصائية تهدف إلى تحديد العلاقة الكمية بين المتغير الاقتصادى الذى نود تفسيره ( المتغير التابع والذى يرمز له Y ) وبين متغير واحد مستقل ( ويرمز له X ) . وعندما يكون هناك متغير واحد تسمى هذه العملية انحدار بسيط . واذا قمنا بوضع البيانات الخاصة $X$ و$Y$ فى صورة رسم بيانى ، فعندئذ يمكننا استخدام تحليل الانحدار لتقدير الخط المؤدى إلى تدنية مجموع مربعات الانحرافات لبيانات المشاهدات الخاصة بـ $XY$ . وتعرف هذه الطريقة بطريقة المربعات الصغرى . ويمكن الحصول على ميل خط الانحدار وفقا للعلاقة التالية:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Xi-\overline{X})(Yi-\overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(Xi-\overline{X})^2}$$

و يقيس $\hat{b}$ $\Delta Y / \Delta X$ . أي التغير في المتغير التابع عد تغير المستقل بوحدة واحدة. كما يمكن الحصول على ثابت الانحدار ( $\hat{a}$ ) من خلال المعادلة :

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{X}$$

وهكذا تكون معادلة خط الانحدار هى :

$$\hat{Y}_t = \hat{a} + \hat{b}X_t$$

ولاختبار الأهمية الإحصائية $\hat{b}$ لابد أولاً من حساب الانحراف المعيارى ( $s_b$ ) – أو الخطأ – لـ $b$ . وذلك من خلال :

$$s_{\hat{b}} = \sqrt{\frac{\sum(Y_t-\hat{Y}_t)^2}{(n-k)\sum(X_t-\overline{X})^2}} = \sqrt{\frac{\sum e_t^{\,2}}{(n-k)\sum(X_t-\overline{X})^2}}$$

بينما

$$se_{\hat{a}} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-2}\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}}{\sum(y_i-\hat{y})^2}\right)}$$

حيث $e_t$ هو الخطأ – أو الانحراف – لقيم $Y$ الفعلية عن القيم التقديرية ( $\hat{Y}$ ) فى العام $t$ و$k$ هو عدد المعاملات المقدرة ( وعددها 2 فى حالة الانحدار البسيط ) . ثم نقوم بقسمة $b$ على $s_b$ لنحصل على الإحصائية $t$ .

$$t = \frac{\hat{b}}{s_{\hat{b}}}$$

وإذا تجاوزت قيمة إحصاء $t$ على القيمة الحرجة لتوزيع $t$ ( راجع الملحق ) عند مستوى معنوية معطى مع $n-k$ ( وهي في هذه الحالة $n-2$ ) درجة حرية ، فإننا نسلم بأن $\hat{b}$ معنوية إحصائياً .

ثم نجد أن معامل التحديد ( $R^2$ ) يمكن الحصول عليه من المعادلة :

ومن هنا يمكن ان نعرف معامل التحديد $R^2$ بأنه نسبة التغير الإجمالي في y المفسر بـ x

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

او

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

حيث ان $0 < R^2 < 1$

وأخيرا نجري اختبار فيشر والذي يعبر هذا الاختبار عن المعنوية الكلية لنموذج الانحدار . فتكون فرضية العدم: $H_0 : a=b=0$، حيث نحسب قيمة $F_c$ او نقارنها بـ F المجدولة

$$F_c = \frac{R^2/k-1}{(1-R^2)/n-k}$$

في حالة الانحدار البسيط

$$F_c = \frac{R^2}{(1-R^2)/n-k}$$