طريقة المربعات الصغرى وفرضياتها الأساسية

طريقة المربعات الصغرى

تعتمد طريقة المربعات الصغرى العادية على الحصول على مقدرات، الانحدار حيث تمثل a الثابت، b الميل، بحيث يتم تصغير مجموع مربعات البوا قي إلى آدني قيمه لها. بحيث يجري تعريف مكون يطلق علية مجموع المربعات البوا قي وبعد ذلك يشرع في الحصول على , α، β , بحيث يتم تصغير هذا المكون إلى أدنى قيمه له.

تعطينا طريقة المربعات الصغرى مقدرات الانحدار a ، b ولكن لا تعطينا مقدرة التباين وهذا يعتبر من نقاط ضعف طريقة المربعات الصغرى.

لمعالجة النموذج الخطي لابد من وجود فرضيات أساسيه حول الخطأ العشوائي.

$$\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i$$

للحصول على مقدرات المربعات الصغرى العادية يجب أن نحصل أولا على البواقي:

$$e_i^2 = (Y - (a + bX))^2$$

مجموع مربعات البواقي $=\sum e^2$

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{a} - \hat{b}X)^2$$

يتم التوصل إلى الخط الذي تكون فيه مجموع مربعات البواقي أصغر ما يمكن [اختيار الخط الذي يدني مجموع مربعات البواقي إلى أصغر ما يمكن]. باستخدام الرياضيات فأن الشرط الضروري يتطلب اشتقاق مجموع مربعات البواقي للمجاهيل a b عن طريق الاشتقاق الجزئي وبعد ذلك نساوي المعادلات التي تم الحصول عليها بالصفر. ثم نطبق جمل المعادلات للحصول على قيم المقدرات.

2.2.3. فرضيات طريقة المربعات الصغرى

تقوم طريقة المربعات الصغرى على فرضيات تتعلق بالخطأ العشوائي:

1- **الوسط الصفري**: أي أن متوسـط التوزيع الاحتمالي الخاص بالمتغير العشوائي معدوم. ويعني بذلك تمركز قيم u حول الصفر. $E(u)=0$

2- **ثبات التباين**: تباين التوزيع الاحتمالي الخاص بالعناصر العشوائية u يساوي قيمه ثابتة وموجبة.

$$V(u_i)=\sigma^2$$

3- **استقلالية الخطأ العشوائي**: أي أنه لا يوجد ارتباط بين بين قيم المتغير العشوائي أي التباين المشترك لها معدوم. فهي بذلك مستقله عن بعضها. $COV(u_i,u_j)=0$

4- **لا يوجد ارتباط بين المتغير المستقل والخطأ** أي: $COV(x_i,u_i)=0$

5 - **التوزيع الطبيعي للخطأ العشوائي** انطلاقا من الفرضية 1 و 2 ، بالتالي $u_i \sim N(0,\sigma^2)$

تقدير معاملات النموذج القياسي بطريقة المربعات الصغرى

تستعمل طريقة المربعات الصغرى لتقدير معالم نموذج الانحدار الخطي، والهدف من هذه الطريقة هو الحصول على اصغر بواقي ممكنة (سالبة او موجبة) حيث يكون المطلوب منا اختيار المقدارين $\hat{a}$ و $\hat{b}$ بطريقة تجعل مجموع البواقي معدوما أو اصغر ما يمكن $\sum \hat{e}_i = 0$

ولكن هنا قد تلغي البواقي السالبة الموجبة، لذلك تضيف الطريقة شرطا آخر ، فهي تقترح تصغير مجموع مربعات البواقي الى ادنى قيمة ممكنة

$$Min\sum e_i^2 = Min\ \sum(y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$=Min\ \sum(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2$$

بما اننا نريد معرفة قيمة $\hat{a}$ و $\hat{b}$ التي تجعل $\sum e_i^2$ اقل ما يمكن فاننا نجد ان ذلك يمكن تحقيقه عن طريق إيجاد المشتق الجزئي للدالة بالنسبة لكل من $\hat{a}$ و $\hat{b}$ ومساوات المشتقات الجزئية الأولى للصفر لأنها تمثل نهاية صغرى وذلك على النحو التالي:

$$\frac{\partial\ \sum e_i^2}{\partial\ \hat{a}} = 0$$

$$\frac{\partial\ \sum(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2}{\partial\ \hat{a}} = 0$$

$$-2\sum(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i) = 0 \leftrightarrow \sum(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i) = 0$$

$$\leftrightarrow \sum y_i - n\hat{a} - \hat{b}\sum x_i = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3)$$

$$\leftrightarrow \sum y_i = n\hat{a} + \hat{b}\sum x_i$$

وبقسمة الطرفين على n نجد

$$\bar{y} = \hat{a} + \hat{b}\bar{x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.3)$$

$$\frac{\partial\ \sum \hat{e}_i^2}{\partial\ \hat{b}} = 0 \leftrightarrow -2\sum x_i\ (y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i) = 0$$

$$\leftrightarrow \sum x_i y_i - \hat{a}\sum x_i - \hat{b}\sum x_i^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(4.3)$$

من (2.3) و(4.3) يمكن إيجاد قيمة $\hat{b}$:

$$\sum x_i y_i - \hat{a}\sum x_i - \hat{b}\sum x_i^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(4.3)$$

$$\sum y_i - n\hat{a} - \hat{b}\sum x_i = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3)$$

$$\sum x_i y_i - \hat{a}\sum x_i - \hat{b}\sum x_i^2 = 0$$

بضرب طرفي (2.3) في $\sum x_i$ نجد

$$\sum x_i \sum y_i - n\hat{a}\sum x_i - \hat{b}(\sum x_i)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.3)$$

بضرب طرفي (4.3) في n نجد:

$$n\sum x_i y_i - n\hat{a}\sum x_i - n\hat{b}\sum x_i^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6.3)$$

$$\sum x_i \sum y_i - n\hat{a}\sum x_i - \hat{b}(\sum x_i)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.3)$$

بطرح (6.3) من (5.3) نجد

$$n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i - n\hat{a}\sum x_i + n\hat{a}\sum x_i - n\hat{b}\sum x_i^2 + \hat{b}(\sum x_i)^2 = 0$$

$$n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i = n\hat{b}\sum x_i^2 - \hat{b}(\sum x_i)^2$$

$$n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i = \hat{b}\left(n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2\right)$$

$$\hat{b} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7.3)$$

لتبسيط العلاقة (7.3)

$$= \frac{n\left(\sum x_i y_i - \frac{n\sum x_i}{n}\frac{n\sum y_i}{n}\right)}{n\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum n\frac{x_i}{n})^2}{n}\right)}$$

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \frac{\sum(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{y_i} - \overline{\boldsymbol{y}})}{\sum(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})^2}$$

ومن المعادلة (3.3) نجد:

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{y}} - \hat{\boldsymbol{b}}\overline{\boldsymbol{x}}$$

مثال (02):

إليك معطيات الجدول التالي الممثلة لبيانات الاستهلاك الكلي والدخل المتاح لدولة ما خلال 12 سنة.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الدخلX_i	114	118	126	130	136	140	148	156	160	164	170	178
الاستهلاكy_i	102	106	108	110	122	124	128	130	142	148	150	154

– اوجد معادلة انحدار الاستهلاك الكلي والدخل المتاح. وماذا تعني مقدرات نموذج الانحدار اقتصاديا؟

الحل

نموذج الانحدار $y_i = a + bx_i$ نسمي

y_i: الاستهلاك وهو المتغير التابع؛

x_i: الدخل وهو المتغير المستقل.

n	الاستهلاك y_i	الدخل X_i	$y_i - \bar{y}$	$x_i - \bar{x}$	$(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	102	114	-25	-31	775	961
2	106	118	-21	-27	567	729
3	108	126	-19	-19	361	361
4	110	130	-17	-15	255	225
5	122	136	-5	-9	45	81
6	124	140	-3	-5	15	25
7	128	148	1	3	3	9
8	130	156	3	11	33	121
9	142	160	15	15	225	225
10	148	164	21	19	399	361
11	150	170	23	25	575	625
12	154	178	27	33	891	1089
المجموع	1524	1740	0	0	4144	4812
	$\bar{y} = 127$	$\bar{x} = 145$				

$$\hat{b} = \frac{\sum(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum(y_i - \bar{y})^2} = \frac{4144}{4812} = 0.86$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 127 - 0.86(145) = 2.3$$

ومنه معادلة الانفاق الاستهلاكي المقدر كما يلي

$$\hat{y}_i = 2.3 + 0.86x_i$$

اقتصاديا المقدر $\hat{a} = 2.3$ يمثل الاستهلاك المستقل عن الدخل أي قيمة الاستهلاك لما y=0 نلاحظ ان $\hat{a} > 0$ وهذا ما يتوافق مع النظرية الاقتصادية، المقدر $\hat{b} = 0.86$ ميل خط الانحدار $\hat{b} = \frac{\partial c}{\partial y}$

وهو يمثل الميل الحدي للاستهلاك او نسبة التغيير في الاستهلاك بتغير وحدة واحدة من الدخل. نلاحظ ان $0 < \hat{b} < 1$ وهذا مايتوافق مع النظرية الاقتصادية الكنزية.