الفصل الأول
حساب الأخطاء Errors

مقدمة:

إن التحليل العددي هو علم التقريب حيث يتم استخدام طرق عددية لحل المسائل المعقدة وغير القابلة للحل بالطرق التحليلية وينشأ عن استخدام هذه الطرق العددية أخطاء يجب معرفتها عند الحصول على أي إجابة وذلك لكي نحكم على قبول هذه الإجابة أو رفضها.

تعريف: الخطأ هو الفرق بين القيمة الحقيقة والقيمة التقريبية. نرمز للعدد التقريبي a وهو العدد الذي يختلف قليلا جدا عن العدد الحقيقي A .

اذا كان $a < A$ فأن العدد a يدعى بالتقارب الاصغر ل A واذا كان $a > A$ فأن العدد a يدعى بالتقارب الاكبر ل A

مثال:

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$

يعتبر 1.41 بالتقارب الاصغر بالنسبة إلى $\sqrt{2}$ و 1.42 بالتقارب الاكبر بالنسبة إلى $\sqrt{2}$ وتعبر عن العلاقة بين القيمتين التقريبية والحقيقية ب $A \approx a$ ويرمز للخطأ Δa الذي هو بموجب التعريف اعلاه

$\Delta a = a - A$ او $\Delta a = A - a$

فأذاكانت $A > a$ كان الخطأ موجبا اي ان $\Delta a > 0$

واذا كانت $A < a$كان الخطأ سالبا اي ان $\Delta a < 0$

للحصول على العدد المضبوط(القيمة الحقيقية) A نضيف مقدار الخطأالى العدد التقريبي a اي

$$A = a + \Delta a$$

بناءا عليه يمكن اعتبار العدد المضبوط هو العدد التقريبي الخالي من الخطأ أو مقدار الخطأ صفر. وفي كثير من الحالات لا تعرف علامة الخطأ سالبة ام موجبة، لذا ينصح باستخدام الخطأ المطلق للعدد التقريبي:

$$\Delta = |\Delta a|$$

هناك عدة أنواع من الخطأ أهمها:

1- خطأ المعطيات (DATA) الناتجة عن حل المسائل التي نحصل عليها من التجارب العملية غير الدقيقة بشكل كاف أو التي نأخذها مقربة لقيم حقيقية وذلك للتسهيل مستخدمين بذلك قواعد التدوير مثلاً.

2- خطأ الطريقة: ينتج عن الاستعاضة عن علاقة رياضية معقدة مثلاً بعلاقة أخرى أبسط منها. ومثال ذلك استخدام طريقة شبه المنحرف مثلاً في حساب قيمة التكامل المحدود.

3- الخطأ المقتطع: والناتج عن اعتبار أن مجموع السلسلة غير المنتهية مثلاً هو عدد من حدودها.

4- أخطاء الحاسب الآلي: ناتجة عن الحاسب نفسه فمثلاً لنفرض أن لدينا حاسب بحيث أن كل عدد فيه يحتوي على خمسة أرقام فقط وإننا نريد جمع العددين 9.2654 و 7.1625 إن المجموع هو 16.4279 وهو يحتوي على ستة أرقام عندئذ الحاسب لا يستطيع تخزين هذه الأرقام وبالتالي يقوم بتدوير الأرقام الستة إلى 16.428 .

أخيراً هناك أخطاء مهملة، مثل الخطأ الشخصي الناتج عن الشخص الذي يقوم بعملية القياس لتجربة ما مقارنة بشخص آخر يقوم بعملية القياس لذات التجربة.

يمكن أن نعبر عن الأخطاء عادة بثلاثة طرق:

(1-1) **الخطأ المطلق** Absolute error :

ويعرف بأنه عبارة عن الفرق بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية ويرمز له بالشكل: $E_a = |x - x_1| = \Delta x$

حيث x هي القيمة الحقيقية (الدقيقة) و x_1 القيمة التقريبية المحسوبة أو التقريبية التجريبية، (سنرمز للخطأ المطلق بـ E بدلاً من E_a إذا لم يكن هناك التباس للسهولة).

يوجد في هذا التعريف حالتان ينبغي اخذها بنظر الاعتبار:

١-القيمة الحقيقية ل x معلومة اذن يمكن معرفة مقدار الخطأ Δ

٢- القيمة الحقيقية ل x غير معلومة وهو حال الكثير من المسائل. بذلك لا يمكن معرفة الخطأ Δ

ملاحظه: لتوضيح الموضوع اكثر تعطى الامثلة اثناء المحاضرة فقط

(المحاضرة الاولى)

(1-2) **الخطأ النسبي** Relative error :

وهو عبارة عن الخطأ المطلق مقسوماً على القيمة الحقيقية. حيث إن الخطأ المطلق لا يعطي فكرة حقيقية عن دقة القياس مثلاً : لو قسنا طول غرفة وطول المسافة من الدمام إلى الرياض وكان الخطأ المطلق نفسه فالسؤال هو أي القياسين أدق. طبعاً المسافة من الدمام إلى الرياض أدق وبالتالي لمعرفة ذلك تم إدخال التعريف السابق والذي يرمز له بـ:

$$E_r = \frac{E}{|x|} = \frac{\Delta x}{|x|} \qquad (1\text{-}1)$$

(1-3) **الخطأ المرتكب:**

وهو عبارة عن إحدى القيمتين:

$$\alpha_x = x_1 - x \quad \text{و} \quad \alpha_x = x - x_1 \qquad (1\text{-}2)$$

أي أن :

$$E = |\alpha_x| = |x - x_1| = |x_1 - x|$$

(1-4) **الخطأ المئوي** Percentage error

وهو عبارة عن الخطأ النسبي مضروباً بـ 100 . أي يساوي $100\,E_r$.

Newton's Method for finding the square root of a number $x = \sqrt{a}$

$$f(x) = x^2 - a^2 = 0$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a^2}{2\,x_k}$$

Example : a = 5 , initial approximation $x_0 = 2$.

$$x_1 = 2.25$$

$$x_2 = 2.236111111$$

$$x_3 = 2.236067978$$

$$x_4 = 2.236067978$$