المحاضرة الخامسة

مثـال (١ ،١٣):

تقوم أحد الشركات لتجميع أجهزة معينـة بفحص روتينـي لكل جهـاز يـتم تجميعـه فيها. فإذا كان الجهاز رقم n معيباً فإنه يتم وضع $X_n = 1$ وأما إذا كـان سليماً فيتم وضـع $X_n = 0$. بفرض أن عمليـة الإنتـاج تخضـع لنظـام دقـة معين فـإن المتغيـرات العشـوائية X_1, X_2, ... تكـون مسـتقلة وإذا كـان احتمـال الحصـول علـى نظـام معيـب p ثابـت مـع الـزمن، فـإن العمليـة العشـوائية $\{X_n : n = 1,2,...\}$ تكـون مثـالاً لعمليـة برنـوللي باحتمـال النجاح p.

٢. **عمليــة ذي الحــدين Binomial process.** بفــرض أن العمليــة العشــوائية $\{X_n : n = 1,2,...\}$ تكون عملية برنوللي باحتمال النجاح p. ليكن :

$$S_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ X_1 + X_2 + ... + X_n\ , & n = 1,2,,... \end{cases} \qquad (١ ،١)$$

عبارة عن عدد مرات النجاح خلال المحاولات الأولى حتـى إتمـام المحاولـة رقـم n. إذن العملية العشوائية $\{S_n : n = 0,1,2,...\}$ تسمى عملية **ذي الحدين،** حيث أن:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,2,...,n$$

فضاء الحالة وفضاء المعلمة لعملية ذي الحدين يأخذا نفس الصورة والتـي تسـاوي $\{0,1,2,...\}$.

٣. **عملية بواسون Poisson process.** عملية **بواسون** بمعدل λ تكـون عبـارة عـن عملية عشوائية، مثلا $\{N_t : t \geq 0\}$، ذات قيمة صحيحة وتحقق الخواص التالية:

١. $N_0 = 0$

٢. المتغيرات العشوائية $N_{t+s} - N_t$ تتبع توزيع بواسون بمتوسط λs، وذلك لجميـع $t > 0$ ، $s > 0$.

٣. المتغير العشوائي N_t يكون له زيادات مستقلة.

فضـاء الحالـة لعملية بواسون $\{N_t : t \geq 0\}$ يكون منفصل حيث $S = \{0,1,2,...\}$ أما فضـاء المعلمة فهو متصـل حيـث $T = \{t : t \geq 0\}$. تنتشـر تطبيقـات عمليـة بواسـون فـي العديـد من المجالات، علي سبيل المثال : نموذج لعملية وصـول الزبـائن لمتجـر مـا، نمـوذج لعدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى محول المكالمات، نمـوذج وصـول الجسـيمات المشعة لعداد جيجر، ... الخ.

٤. **عملية جاوس Gaussian process.** تسمى العمليـة العشـوائية $\{X_t : t \geq 0\}$ بعمليـة **جاوس** إذا كان متجه المتغيرات العشوائية $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ يسـلك التوزيـع الطبيعـي

المتعدد لجميع القيم $t_1,t_2,...,t_n \in [0,\infty)$ ولكل $n \ge 1$.

فضاء الحالة وفضاء المعلمة لعملية جاوس يكونا متصلين. تظهر عملية جاوس في العديد من التطبيقات في مجالات الهندسة الكهربائية، علي سبيل المثال : كنموذج لتأثير تغير الجهد الكهربائي على المقاومات، نموذج تأثير الضوضاء الحاصلة على جهاز الاستقبال على عملية الاتصالات الإلكترونية.

٥. عملية ونـر Wiener process. تسمى العملية العشوائية $\{W_t : t \ge 0\}$ بعملية **ونـر** إذا حققت الشروط التالية:

١. $W_0 = 0$

٢. $\{W_t : t \ge 0\}$ تكون ذات زيادات مستقرة ومستقلة.

٣. لكل $t > 0$، فإن المتغير العشوائي W_t يتبع التوزيع الطبيعي بالمتوسط 0 والتباين $c^2 t$، حيث c كمية حقيقية.

فضاء الحالة وفضاء المعلمة لعملية جاوس يكونا متصلين. تسمى عملية ونـر أحيانا بعملية **حركة براون** Brownian motion process. تظهر عملية ونـر في العديد من التطبيقات في مجالات ميكانيكا الكم ، والظواهر المتداخلة والاقتصاد وغيرها من التطبيقات.

٦. عملية أورنستين-أوهلنبك The Ornstein-Uhlenbeck process. لتكن $\{W_t : t \ge 0\}$ عبارة عن عملية ونـر، وبتعريف المتغير العشوائي U_t، لبعض قيم $\alpha > 0$، على الصورة:

$$U_t = e^{-\frac{\alpha t}{2}} W_{e^{\alpha t}},\; t \ge 0$$

إذن العملية العشوائية $\{W_t : t \ge 0\}$ تسمى عملية **أورنسين-أوهلنبك**.

فضاء الحالة وفضاء المعلمة لهذه العملية يكونا متصلين. ظهرت هذه العملية عند دراسة نموذج لوصف سرعة جسيم مغمور في سائل أو غاز، والتي تفيد في الميكانيكا الإحصائية.

(١ ،٦) تمارين

(١,١) بفرض تجربة تتكون من مشاهدة تسريع عربة سباق عند اللحظة الزمنية X_t

خلال الدقيقة الأولى في السباق. وبفرض أن Y_t ، Z_t سرعة وموضع العربة عند اللحظة . أوصف فضاء الحالة وفضاء المعلمة للعمليات العشوائية $\{X_t : t \ge 0\}$ ، $\{Y_t : t \ge 0\}$ ، $\{Z_t : t \ge 0\}$.

(١,٢) يتم تسجيل درجات حرارة الظهيرة في ميناء الملك فهد الدولي كل يوم لمدة عام ابتداء من الأول من يناير. ينتج من هذه العملية متتابعة من القياسات لدرجة، أوصف العملية العشوائية التي تناسب هذه الظاهرة.
لاحظ أن الدارسين قد اعتادوا على عمل استدلال لنوعين من متوسطات العمليات العشوائية وهما:
أ) متوسطات المجموعة مثل: متوسط درجة الحرارة أثناء الظهيرة في التاسع عشر من فبراير عام 1999.
ب)متوسطات الزمن مثل: متوسط درجة الحرارة أثناء الظهيرة لعام 2002.

(١,٣) بفرض أن M_t يمثل عدد المكالمات المستلمة عند عامل تحويل مكالمات تليفونية عند اللحظة t، في كل الثانية خلال فترة زمنية طولها خمسة عشر دقيقة. أوصف:
أ) عملية عشوائية تناسب هذه الظاهرة.
ب) متوسط المجموعة.
ت) متوسط الزمن.

(١,٤) عرف عمليات عشوائية لقياس درجات الحرارة في التمرين (١,٢) بشرط أن تكون هذه العملية:
أ) منفصلة الزمن (المعلمة) منفصلة القيمة (الحالة).
ب) منفصلة الزمن (المعلمة) متصلة القيمة (الحالة).
ت) متصلة الزمن (المعلمة) منفصلة القيمة (الحالة).
ث) متصلة الزمن (المعلمة) متصلة القيمة (الحالة).

(١,٥) يمكن اختيار نموذج بسيط لدرجة الحرارة اليومي في التمرين (١,٢) بتعريف C_n على الصورة:

$$C_n = 16\left[1-\cos\frac{2\pi n}{365}\right] + 4\,X_n$$

حيث أن $X_1, X_2, ...$ تكون عبارة عن متتابعة من المتغيرات العشوائية المستقلة

والتي لها جميعا التوزيع الطبيعي المعياري. أوجد متوسط C_n.

(٦، ١) يمكن اختيار نموذج آخر لدرجة الحرارة اليومي في التمرين (٢,١) بتعريف C_n على الصورة:

$$C_n = \frac{1}{2} C_{n-1} + 4 X_n$$

حيث أن $C_0, X_1, X_2, ...$ تكون عبارة عن متتابعة من المتغيرات العشوائية المستقلة والتي لها جميعا التوزيع الطبيعي المعياري. أوجد متوسط وتباين C_n .