العملية العشوائية منفصلة الزمن منفصلة الحالة تحقق خاصية ماركوف إذا تحقق الشرط التالي:

$$P(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i,\ X_{n-1}=i_{n-1},\dots,X_1=i_1,X_0=i_0)=P(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i)$$

لجميع الحالات $j,i,\ i_{n-1},\dots,i_1,i_0$ ولكل $n$. يمكن تفسير هذه الخاصية كالآتي: التنبؤ بقيمة $X_{n+1}$ يعتمد فقط على القيمة الحالية لـ $X_n$ ولا يعتمد على قيم الحالات الماضية $X_{n-1},\dots,X_1,X_0$ .

**بمعنى آخر:** بإعطاء الحالة الحالية $X_n$ فإن الحالات الماضية $X_{n-1},\dots,X_1,X_0$ لا تؤثر على الحالات في المستقبل $X_{n+1}$ ، $X_{n+2}$ ، . . . .

الأمثلة التالية تمكن القارئ من فهم خاصية ماركوف فهما جيدا.

**مثال (١ ، ١٠):**

بفرض إلقاء قطعة عملة معدنية غير متميزة عشر مرات وأن $X_n$ يرمز إلى العدد الكلي للصور التي تظهر حتى الرمية رقم $n$. يقود هذا الفرض إلى العملية العشوائية $\{X_n : n=1,2,\dots\}$ بفضاء الحالة $S=\{0,1,2,\dots,10\}$ وفضاء المعلمة $T=\{1,2,\dots,10\}$ وأن:

$$P(X_{n+1}=j\,|\,X_n=i,\ X_{n-1}=i_{n-1},\dots,X_1=i_1)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & j=i+1,(i=0,1,2,\dots,9)\\ \frac{1}{2}, & j=i,(i=0,1,2,\dots,10)\\ 0\ , & \text{otherwise}\end{cases}$$

من الواضح أن هذا الاحتمال الشرطي يعتمد على $i$ فقط ولا يعتمد على $i_{n-1},\dots i_2,i_1$ ، وهذا يعني أنه بمعرفة $X_n$ فإن $X_{n+1}$ لا يعتمد على أي من $X_{n-1},\dots,X_1$ ، وبالتالي فإن هذه العملية تحقق خاصية ماركوف ومن ثم فإن $\{X_n : n=1,2,\dots\}$ تكون سلسلة ماركوف.

**مثال (١ ، ١١):**

بالعودة إلى المثال (١ ، ١٠) ولكن بفرض أن قطعة العملة متميزة وأن احتمال ظهور كتابة يساوي ثلاث أضعاف احتمال ظهور صورة، أي أن:

P(صورة) = 1/4,    P( كتابة) = 3/4

إذن:

$P(X_3=2\,|\,X_2=1,\ X_1=1)=P($ظهور صورة في الرمية الثالثة$)=\frac{1}{4}$ ،

أيضا:

$P(X_3 = 2 | X_2 = 1,\ X_1 = 0) = P($ظهور صورة في الرمية الثالثة$) = \frac{1}{4}$ ،

$P(X_3 = 2 | X_2 = 2,\ X_1 = 1) = P($ظهور كتابة في الرمية الثالثة$) = \frac{3}{4}$.

لاحظ أن جميع هذه الاحتمالات الشرطية تعتمد فقط على قيمة $X_2$ ومستقلة عن قيمة $X_1$. بالمثل يمكن حساب أن:

$$P(X_4 = 3 | X_3 = 3, X_2 = 1,\ X_1 = 1) = \frac{3}{4},$$

$$P(X_4 = 3 | X_3 = 2, X_2 = i_2,\ X_1 = i_1) = \frac{1}{4},$$

$$P(X_4 = 4 | X_3 = 3, X_2 = i_2,\ X_1 = i_1) = \frac{1}{4},$$

$$P(X_4 = 5 | X_3 = 3, X_2 = i_2,\ X_1 = i_1) = 0.$$

لاحظ ثانية أن هذه الاحتمالات الشرطية تعتمد فقط على قيمة $X_3$ ومستقلة عن قيم كل من $X_1$ ، $X_2$. عموما يمكن حساب أن:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i,\ X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1) = \begin{cases} 1/4, & j = i+1, (i = 0,1,2,...,9) \\ 3/4, & j = i, (i = 0,1,2,...,10) \\ 0\ , & \text{otherwise} \end{cases}$$

يعتمد هذا الاحتمال الشرطي فقط على قيمة $i$ ولا يعتمد على قيم $i_1, i_2, ..., i_{n-1}$. ومن ثم فإنه عندما يكون قيمة $X_n$ معلومة فإن قيمة $X_{n+1}$ لا تعتمد على أي من $X_{n-1}, ..., X_1$. وهذا يبرهن على أن العملية العشوائية في هذا المثال تحقق خاصية ماركوف.

**مثال (١، ١٢):**

تتكون لعبة بسيطة من إلقاء قطعة عملة غير متميزة العديد من المرات، وأن اللاعب سيكسب ريالاً واحداً كلما ظهرت صورة ويخسر ريالاً واحداً كلما ظهرت كتابة. ليكن $X_n$ عبارة عن المكسب التراكمي للاعب بعد إلقاء القطعة رقم $n$، حيث أن القيمة السالبة تشير إلى الخسارة الفعلية وأن $X_0 = 0$. العملية العشوائية $\{X_n : n = 1,2,...\}$ في هذا المثال تحقق خاصية ماركوف. ولتوضيح ذلك سنقدم الحالة الخاصة التالية. نفترض أن اللاعب أصبح يمتلك رصيدا تراكميا مقداره ست ريالات وذلك بعد إلقاء

قطعة العملة عشرة مرات. يلاحظ أن معرفة ما جرى من خسارة أو مكسب خلال المحاولات التي تسبق المحاولة العاشرة ليس لها أي تأثير على معرفة المكسب التراكمي للاعب بعد إلقاء القطعة الحادية عشر ، فإن المكسب التراكمي بعد إجراء المحاولة الحادية عشر سيصبح إما سبع ريالات باحتمال $\frac{1}{2}$ أو خمس ريالات بنفس الاحتمال. وهذا يعني أن المكسب التراكمي بعد المحاولة الحادية عشر يعتمد فقط على المكسب التراكمي للاعب بعد المحاولة العاشرة. وحيث أنه من الواضح أن هذه النتيجة تتحقق لباقي جميع المحاولات، إذن العملية العشوائية في هذا المثال تحقق خاصية ماركوف.

## (١ ،٥) بعض العمليات العشوائية الشائعة
## Some common stochastic processes

فيما يلي نقدم بإيجاز قائمة لبعض العمليات العشوائية الخاصة والتي يكون لكل منها تعريفها الخاص وخواصها وتطبيقاتها.

**١. عملية برنوللي Bernoulli process** . تسمى العملية العشوائية $\{X_n : n = 1,2,...\}$ بعملية **برنوللي** باحتمال النجاح $p$ $(0 \le p \le 1)$ إذا تحقق الشرطان:

(أ) تكون المتغيرات العشوائية $X_1$ ، $X_2$ ، ... مستقلة.

(ب) $P(X_n = 1) = p$ ، $P(X_n = 0) = q = 1 - p$ لكل $n = 1,2,...$

فضاء المعلمة لعملية برنوللي $\{X_n : n = 1,2,...\}$ عبارة عن فضاء منفصل ويعطى على الصورة $T = \{1,2,...\}$ ، وفضاء الحالة أيضا يكون فضاء متقطع ويعطى بــ $S = \{0,1\}$.