مقدمــة
Introduction

تشير دراسة الاحتمال إلى تجربة مكونة من إجراء ومشاهدات. خلال دراسة المتغيرات العشوائية فإن كل مشاهدة تناظر عددا أو أكثر. أما عند دراسة العمليات العشوائية فإن كل مشاهدة يقابلها دالة في الزمن. كلمة عشوائية تعني الاحتمالية أما كلمة عملية فتعني دالة في الزمن. ومن ثم عندما ندرس العمليات العشوائية فإننا ندرس دوال عشوائية في الزمن. غالبا ما تتضمن جميع تطبيقات الاحتمالات مشاهدات متعددة مأخوذة على فترة زمنية. فعلى سبيل المثال، عند دراسة احتمال وقوع حدث ما، فإننا نهتم بتكرارات وقوع هذا الحدث عند إعادة إجراء التجربة عددا كبيرا من المرات. نهتم أيضا بمتتابعة زمنية من الحوادث عند دراسة العمليات العشوائية.

يعتبر هذا الفصل مقدمة قصيرة عن العمليات العشوائية لتقديم فكرة عامة حول ما تعنيه العملية العشوائية وسيتم تدعيم هذه المفاهيم بالأمثلة. كما سنعرض أيضا في هذا الفصل بعض أنواع العمليات العشوائية وخواصها. علما بأننا سنتعرض في هذا الكتاب للعمليات العشوائية الأكثر شيوعا.

(١ ، ١) أمثلة
Examples

غالباً ما تسبب الحوادث العشوائية في وضع شروط على الأنظمة حتى تتغير مع الزمن. تتسبب الأعطال العشوائية لماكينة ما في تأرجح فترات توقفها من يوم لآخر. تسبب عشوائية الطلب على السيارات في تغير سياسة مالك متجر السيارات لتغير الأسعار من أسبوع لآخر. يتسبب الاضطراب الكهربائي العشوائي في الجو في تذبذب موجات الراديو مما يؤدي إلى سكون المستقبل (توقفه عن العمل). العمليات التي تتأرجح مع الزمن كنتيجة لحوادث عشوائية مؤثرة على نظام ما تسمى بالعمليات العشوائية. قبل أن نعرض تعريف العملية العشوائية نقدم الأمثلة التالية.

مثـال (١ ، ١):

بفرض أننا ألقينا زهرة نرد متزنة عددا من المرات، و نهتم بالعدد الذي يظهر على السطح العلوي للزهرة في الرمية رقم n . ليكن $X(1)$ يرمز إلي العدد الذي يظهر في الرمية الأولى، أما $X(2)$ فيرمز إلي العدد الذي يظهر في الرمية الثانية ، ...، وهكذا . وبالتالي يمكن وصف هذه التجربة العشوائية بعائلة المتغيرات العشوائية $\{X(n): n \in T\}$ ، حيث أن المتغير العشوائي $X(n)$ يكون عبارة عن العدد الذي يظهر في الرمية رقم n والذي يمكن أن يكون أحد القيم 1، 2، ...، 6 وأن $T = \{1,2,3,...\}$.

عائلـة المتغيـرات العشـوائية $\{X(n): n \in T\}$ تكـون عبـارة عـن مثـال لعمليـة عشوائية، والتي يسمى فيها الرمز n بمعلمة العملية العشوائية.

مثـال (١ ،٢):

تم قياس درجة حرارة الظهيرة عند أحد المطارات يوميا خلال عام واحد. ليكن $Y(n)$ يرمز للعدد المسجل في اليوم n. بفرض أن عدد أيام العام هو 365 يوم، فإن العملية $\{Y(n): n \in T\}$ تكون مثال لعملية عشوائية وأن $T = \{1,2,3,...,365\}$. لاحظ أنه ليس من الضروري أن تكون قيمة $Y(n)$ في هذا المثال عدداً صحيحاً.

مثـال (١ ،٣):

بفرض أن عددا من المرضى ينتظرون الطبيب المعالج في أحد المستشفيات، و ليكن $Q(t)$ يرمز إلي عدد المرضى الذين ينتظرون عند اللحظة الزمنية t . من الواضح أنه عندما يصل مريض إلى المستشفى قاصدا ذلك الطبيب فإن قيمة المتغير العشوائي $Q(t)$ تزداد بمقدار الواحد ، أما إذا غادر مريض من هؤلاء المرضى فإن قيمة المتغير $Q(t)$ تتناقص بمقدار الواحد، وهذا يعني أن قيمة المتغير $Q(t)$ تتغير مع الزمن.

في هذا المثال ، عند أي لحظة زمنية t فإن المتغير العشوائي $Q(t)$ يأخذ أحد القيم التالية: 3,2,1,0... ومن ثم فإن عائلة المتغيرات العشوائية $\{Q(t): t \geq 0\}$ تكون مثالاً آخر لعملية عشوائية ذات المعلمة t.

مثـال (١ ،٤):

ليكن $Z(t)$ يرمز إلي منسوب الماء عند أحد السدود عند اللحظة الزمنية t . فإن $\{Z(t): t \geq 0\}$ تكون مثالا آخر لعملية عشوائية، حيث أن المتغير العشوائي $Z(t)$ لا يأخذ بالضرورة قيما صحيحة.

(٢.١) تعاريف
Definitions

نقدم فيما يلي تعريف العملية العشوائية وبعض التعاريف المتعلقة بها.

تعريف (١ ،١):

تسمى عائلة المتغيرات العشوائية $\{X(t): t \geq 0\}$ بالعملية العشوائية stochastic process ذات المعلمة parameter t.

تعريف (١ ،٢):

تسمى مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X(t)$ بحالات states العملية العشوائية، كما يمكن أن تسمى بمواقع positions العملية العشوائية. فإذا كان $X(t)=i$ فإنه يقال بأن العملية تكون في الحالة i عند اللحظة t.

ففي المثال (١ ،١) فإن حالات العملية العشوائية $\{X(n): n \in T\}$ تكون 1، 2، 3، 4، 5، 6. يسمى التغير في قيم المتغير العشوائي $X(t)$ بالانتقال بين حالات العملية العشوائية.

أما في المثال (١ ،٣) فتكون حالات العملية العشوائية $\{Q(t): t \ge 0\}$ عبارة عن 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، ... .

يمكن أن تكون حالات العملية العشوائية عبارة عن كميات عددية أو غير عددية (وصفية) وذلك بناءا على طبيعة العملية العشوائية. ففي نظرية الطوابير، على سبيل المثال، غالبا ما تكون الحالات عبارة عن عدد الزبائن الذين ينتظرون تقديم الخدمة. أما إذا كنا نهتم بوضع نموذج لدراسة حركة توصيل الأمتعة في نظام لشركة طيران، فإن الحالات في هذا النموذج ممكن أن تكون عبارة عن موضع الأمتعة عند أي لحظة، وهذا يكون عبارة عن مثالا لحالات غير عددية. نقوم بتخصيص قيما عددية اختيارية للحالات غير العددية ومن ثم يمكن أن نفكر في أن حالات النظام عند أي لحظة عبارة عن متغير عشوائي عددي.

تعريف (١ ،٣):

فئة جميع القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X(t)$ تسمى بفضاء حالة العملية العشوائية $\{X(t): t \ge 0\}$ state space ويرمز له بالرمز S .

ففي المثال (١ ،١) يكون فضاء الحالة هو $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. أما في المثال (١ ،٣) يكون فضاء الحالة هو $S=\{0,1,2,...\}$.

إذا كانت المجموعة S عبارة عن مجموعة منفصلة فإن العملية العشوائية $\{X(t): t \ge 0\}$ تسمى عملية عشوائية ذات فضاء حالة منفصل. وبالتالي فإن المثالين (١ ،١) و (١ ،٣) يعطيان مثالان لعمليتين عشوائيتين بفضاء حالة منفصل.

إذا كانت المجموعة S عبارة عن مجموعة متصلة ، أي أن $S \subset (-\infty,\infty)$ ، فإن