، إذا كان فضاء الحالة منفصل و فضاء المعلمة منفصل سنكتب $\{X_n : n \in T\}$ بدلا من $\{X(t) : t \in T\}$. من الآن فصاعدا سيتم التعامل في بقية هذا الكتاب مع العمليات العشوائية التي لها فضاء حالة منفصل. يمكن أن يكون فضاء الحالة فضاء ثنائي ، كما في المثال التالي.

مثال (١ ،٥):

أكتب فضاء الحالة وفضاء المعلمة للعملية العشوائية التي تمثل الأهداف المسجلة أثناء لعب مباراة كرة قدم.

الحل:

بفرض أن X_t ، Y_t عبارة عن متغيرين عشوائيين يمثلان على الترتيب الأهداف التي سجلها الفريق الأول والفريق الثاني حتى اللحظة t، ومن ثم فإن الزوج (X_t, Y_t) يمثل الأهداف المسجلة في المباراة حتى اللحظة t ، $0 \le t \le 90$. إذن العملية العشوائية التي تمثل هذه الظاهرة هي $\{(X_t, Y_t) : 0 \le t \le 90\}$ والتي يكون فيها فضاء الحالة $S = \{(x, y) : x, y = 0, 1, 2, \ldots\}$ وفضاء المعلمة $T = \{t : 0 \le t \le 90\}$. تبدأ هذه العملية من الحالة $(0,0)$ ثم عندما يُسجل هدف تنتقل إلى الحالة $(1,0)$ إذا كان الفريق الأول هو الذي بدأ بالتسجيل ، أو إلى الحالة $(0,1)$ إذا كان الفريق الثاني هو الذي بدأ بالتسجيل وهكذا، وبشكل عام فإن هذه العملية ستنتقل من الحالة $(x, y) \in S$ إلى أي من الحالتين $(x+1, y) \in S$ إذا سجل الفريق الأول أو إلى الحالة $(x, y+1) \in S$ إذا سجل الفريق الثاني.

يمكن أن تأخذ المتغيرات العشوائية X_1 ، X_2 ، ... أي نوع من الكميات (عددية أو وصفية) كما يمكن أن تكون معتمدة على بعضها البعض أو تكون مستقلة شرطيا. في المثال التالي تكون المتغيرات العشوائية Y_1 ، Y_2 ، ... مستقلة بينما تكون المتغيرات العشوائية X_1 ، X_2 ، ... غير مستقلة وجميعها تأخذ كميات عددية.

مثال (١ ،٦):

اختار علي أحد الأسهم التجارية للمضاربة في البورصة السعودية، وأنه في كل يوم سيكسب ريالا واحدا باحتمال 1/2 أو يخسر ريالا باحتمال 1/2. بفرض أن المتغير X_n هو مكسب علي بعد عدد n من الأيام:

١. أوجد فضاء الحالة و فضاء المعلمة للعملية العشوائية $\{X_n : n \in T\}$.

٢. أثبت أن : $E[X_n] = 0$ ، $Var[X_n] = n$.

الحل:

١. حيث أن القيم الممكنة للمتغير n تكون 1، 2، 3،... إذن فضاء المعلمة يكون $T = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ، وحيث أن القيم الممكنة للمتغير العشوائي X_n هي $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ،

إذن فضاء الحالة للعملية العشوائية يكون $S=\{0,\pm1,\pm2,...\}$ ، بالتالي فإن العملية العشوائية $\{X_n:n\in T\}$ تكون عملية عشوائية منفصلة الزمن منفصلة الحالة (سلسلة منفصلة الزمن).

٢. بفرض أن Y_i متغير عشوائي يمثل مكسب علي في اليوم رقم i ، إذن :

$$Y_i=\begin{cases}+1, & \text{باحتمال} \quad \frac{1}{2}\\ -1, & \text{باحتمال} \quad \frac{1}{2}\end{cases}$$

وبالتالي فإن :

$$Var[Y_i]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \quad ، \quad E[Y_i]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

ولكن X_n يرتبط بـ Y_i بالعلاقة :

$$X_n=\sum_{i=1}^{n}Y_i$$

إذن

$$E[X_n]=E\left[\sum_{i=1}^{n}Y_i\right]=\sum_{i=1}^{n}E[Y_i]=0$$

وحيث أن المتغيرات العشوائية Y_1 ، Y_2 ، ... Y_n مستقلة ، إذن:

$$Var[X_n]=\sum_{i=1}^{n}Var[Y_i]=\sum_{i=1}^{n}1=n.$$

نقدم الأمثلة الثلاث التالية حتى يتمكن القارئ من فهم تصور العمليات العشوائية وفضاء الحالة وفضاء المعلمة فهما جيدا.

مثـال (١ ،٧):

بفرض أننا ألقينا قطعتي عملة معا خمسين مرة، ونفترض أننا سننجح إذا ظهر على سطحي القطعتين نفس الشيء (كتابة أو صورة) ونفشل خلاف ذلك. ليكن X_n هو عدد مرات النجاح حتى الرمية رقم n. هذه اللعبة تمثل بعملية عشوائية $\{X_n:n\in T\}$ منفصلة الزمن منفصلة الحالة، حيث أن: $T=\{1,2,...,50\}$ ، $S=\{0,1,2,...,50\}$.

مثـال (١ ،٨):

بفرض أن لدينا صندوقين أ ، ب وأننا وضعنا فيهما ثلاث كرات بيضاء وخمس

كرات خضراء بشرط أن يحتوي كل منهما على أربع كرات. بفرض أننا أجرينا عملية سحب متكررة من الصندوقين، و في كل عملية نقوم بسحب كرة عشوائيا من كل صندوق ثم نقوم بعكس موضعي الكرتين (نضع الكرة المسحوبة من الصندوق أ في الصندوق ب، والعكس). ليكن X_n هو عدد الكرات البيضاء في الصندوق أ بعد إجراء عملية السحب رقم n. من الواضح أن $\{X_n : n \in T\}$ تكون عملية عشوائية منفصلة الزمن منفصلة الحالة، حيث أن: $T = \{1, 2, 3, \ldots\}$، $S = \{0, 1, 2, 3\}$. بالمثل إذا كان Y_n هو عدد الكرات الخضراء في الصندوق أ بعد إجراء عملية السحب رقم n، فإن $\{Y_n : n \in T\}$ تكون عملية عشوائية منفصلة الزمن منفصلة الحالة، حيث أن: $T = \{1, 2, 3, \ldots\}$، $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

مثال (١، ٩):

باعتبار عدد الطلاب المقبولين للدراسة في جامعة الملك سعود كل عام، علما بأن جامعة الملك سعود فتحت عام 1957. ليكن $X(1957)$ يرمز إلى عدد الطلاب المقبولين في الجامعة في عام 1957 وأن $X(1958)$ يرمز إلى عدد الطلاب المقبولين في عام 1958، ... إلخ. بالتالي يمكن تمثيل عدد الطلاب المقبولين بجامعة الملك سعود كل عام بعائلة من المتغيرات العشوائية $\{X(n) : n = 1957, 1958, \ldots\}$ والتي تعتبر مثالا لعملية عشوائية منفصلة الزمن منفصلة الحالة.

(١، ٤) خواص العمليات العشوائية
Properties of stochastic processes

يمكن إلقاء بعض الضوء حول العمليات العشوائية بدون الخوض في خواصها البنائية. غالباً ما يهتم الباحثين بدراسة بناء نموذج للعلاقة بين قيم $X(n)$ أو $X(t)$ عندما تتحرك (تتغير) العملية مع الزمن. في أبسط الأنظمة تكون المتغيرات العشوائية $X(n)$ مستقلة. وهذا يعني أن الناتج في وقت ما لا يتأثر بالنواتج في الأزمنة الأخرى. كمثال على ذلك نتائج عملية تكرار إلقاء زهرة نرد غير متميزة. وفي بعض الأنظمة الأخرى تتأثر نتيجة $X(n)$ عند وقت ما بجميع النتائج السابقة. كمثال على ذلك بفرض أنه يتم سحب أعداد عشوائية واحد بعد الآخر وبدون إحلال من صندوق يحتوي على الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100. فمن الواضح أن العدد الذي سيتم سحبه في المستقبل يعتمد على جميع الأعداد التي سحبت من قبل.

فيما يلي بعض الخواص الهامة الأخرى للعمليات العشوائية.

١. **العملية العشوائية ذات زيادات مستقلة** independent increments : تسمى العملية العشوائية $\{X(t): t \in T\}$ بعملية عشوائية ذات زيادات مستقلة إذا كانت المتغيرات العشوائية $X(t_2) - X(t_1)$ ، $X(t_3) - X(t_2)$ ، ... ، $X(t_n) - X(t_{n-1})$ مستقلة لجميع اختيارات الأزمنة t_1 ، t_2 ، ... ، t_n والتي تحقق $t_1 < t_2 < ... < t_n$.

بمعنى آخر : في العملية العشوائية ذات الزيادات المستقلة تكون كميات التغيير في حالة العملية العشوائية على فترات غير متداخلة مستقلة.

٢. **العملية العشوائية ذات زيادات مستقرة (ثابتة)** stationary increments : تسمى العملية العشوائية $\{X(t): t \in T\}$ بعملية عشوائية ذات زيادات مستقرة إذا كان توزيع المتغير العشوائي $X(t+s) - X(t)$ مستقل عن t. وهذا يعني أن التوزيع الاحتمالي لكمية تغير حالة العملية العشوائية خلال فترة معينة $[t, t+s]$ يعتمد فقط على طول الفترة s ولا يعتمد على بدايتها t.

٣. **العملية العشوائية ذات خاصية ماركوف** Markovian property **:** يقال للعملية العشوائية $\{X(t): t \in T\}$ أنها تتمتع بخاصية ماركوف إذا كانت حالتها في المستقبل، بشرط معرفة حالاتها في الماضي والحاضر، لا تتأثر إلا بحالتها الحاضرة فقط، أي أن حالة العملية في الماضي ليس لها أي تأثير على حالتها في المستقبل بشرط معرفة حالتها في الحاضر. وهذا يعني أنه لكل لحظة زمنية u فإن المتغير العشوائي $X(t)$ ، $t > u$ يكون مستقل عن المتغير العشوائي $X(t)$ ، $t < u$ بشرط معرفة المتغير العشوائي $X(u)$. العملية العشوائية التي تتمتع بخاصية ماركوف تسمى عملية ماركوف.