مقدمـة
Introduction

تشير دراسة الاحتمال إلى تجربة مكونة من إجراء ومشاهدات. خلال دراسة المتغيرات العشوائية فإن كل مشاهدة تناظر عددا أو أكثر. أما عند دراسة العمليات العشوائية فإن كل مشاهدة يقابلها دالة في الزمن. كلمة عشوائية تعني الاحتمالية أما كلمة عملية فتعني دالة في الزمن. ومن ثم عندما ندرس العمليات العشوائية فإننا ندرس دوال عشوائية في الزمن. غالبا ما تتضمن جميع تطبيقات الاحتمالات مشاهدات متعددة مأخوذة على فترة زمنية. فعلى سبيل المثال، عند دراسة احتمال وقوع حدث ما، فإننا نهتم بتكرارات وقوع هذا الحدث عند إعادة إجراء التجربة عددا كبيرا من المرات. نهتم أيضا بمتتابعة زمنية من الحوادث عند دراسة العمليات العشوائية.

يعتبر هذا الفصل مقدمة قصيرة عن العمليات العشوائية لتقديم فكرة عامة حول ما تعنيه العملية العشوائية وسيتم تدعيم هذه المفاهيم بالأمثلة. كما سنعرض أيضا في هذا الفصل بعض أنواع العمليات العشوائية وخواصها. علما بأننا سنتعرض في هذا الكتاب للعمليات العشوائية الأكثر شيوعا.

(١، ١) أمثلة
Examples

غالباً ما تسبب الحوادث العشوائية في وضع شروط على الأنظمة حتى تتغير مع الزمن. تتسبب الأعطال العشوائية لماكينة ما في تأرجح فترات توقفها من يوم لآخر. تسبب عشوائية الطلب على السيارات في تغير سياسة مالك متجر السيارات لتغير الأسعار من أسبوع لآخر. يتسبب الاضطراب الكهربائي العشوائي في الجو في تذبذب موجات الراديو مما يؤدي إلى سكون المستقبل (توقفه عن العمل). العمليات التي تتأرجح مع الزمن كنتيجة لحوادث عشوائية مؤثرة على نظام ما تسمى بالعمليات العشوائية. قبل أن نعرض تعريف العملية العشوائية نقدم الأمثلة التالية.

مثال (١، ١):

بفرض أننا ألقينا زهرة نرد متزنة عددا من المرات، و نهتم بالعدد الذي يظهر على السطح العلوي للزهرة في الرمية رقم n . ليكن $X(1)$ يرمز إلي العدد الذي يظهر في الرمية الأولى، أما $X(2)$ فيرمز إلي العدد الذي يظهر في الرمية الثانية ، ...، وهكذا . وبالتالي يمكن وصف هذه التجربة العشوائية بعائلة المتغيرات العشوائية $\{X(n): n \in T\}$ ، حيث أن المتغير العشوائي $X(n)$ يكون عبارة عن العدد الذي يظهر في الرمية رقم n والذي يمكن أن يكون أحد القيم 1، 2، ...، 6 وأن $T = \{1,2,3,...\}$.

عائلة المتغيرات العشوائية $\{X(n): n \in T\}$ تكون عبارة عن مثال لعملية عشوائية، والتي يسمى فيها الرمز n بمعلمة العملية العشوائية.

مثال (١ ،٢):

تم قياس درجة حرارة الظهيرة عند أحد المطارات يوميا خلال عام واحد. ليكن $Y(n)$ يرمز للعدد المسجل في اليوم n. بفرض أن عدد أيام العام هو 365 يوم، فإن العملية $\{Y(n): n \in T\}$ تكون مثال لعملية عشوائية وأن $T = \{1,2,3,...,365\}$. لاحظ أنه ليس من الضروري أن تكون قيمة $Y(n)$ في هذا المثال عدداً صحيحاً.

مثال (١ ،٣):

بفرض أن عددا من المرضى ينتظرون الطبيب المعالج في أحد المستشفيات، و ليكن $Q(t)$ يرمز إلي عدد المرضى الذين ينتظرون عند اللحظة الزمنية t . من الواضح أنه عندما يصل مريض إلى المستشفى قاصدا ذلك الطبيب فإن قيمة المتغير العشوائي $Q(t)$ تزداد بمقدار الواحد ، أما إذا غادر مريض من هؤلاء المرضى فإن قيمة المتغير $Q(t)$ تتناقص بمقدار الواحد، وهذا يعني أن قيمة المتغير $Q(t)$ تتغير مع الزمن.

في هذا المثال ، عند أي لحظة زمنية t فإن المتغير العشوائي $Q(t)$ يأخذ أحد القيم التالية: $0,1,2,3...$ ومن ثم فإن عائلة المتغيرات العشوائية $\{Q(t): t \geq 0\}$ تكون مثالاً آخر لعملية عشوائية ذات المعلمة t.

مثال (١ ،٤):

ليكن $Z(t)$ يرمز إلي منسوب الماء عند أحد السدود عند اللحظة الزمنية t . فإن $\{Z(t): t \geq 0\}$ تكون مثالا آخر لعملية عشوائية، حيث أن المتغير العشوائي $Z(t)$ لا يأخذ بالضرورة قيما صحيحة.

(٢.١) تعاريف
Definitions

نقدم فيما يلي تعريف العملية العشوائية وبعض التعاريف المتعلقة بها.

تعريف (١ ،١):

تسمى عائلة المتغيرات العشوائية $\{X(t): t \geq 0\}$ بالعملية العشوائية stochastic process ذات المعلمة parameter t.

تعريف (١ ،٢):

تسمى مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X(t)$ بحالات states العملية العشوائية، كما يمكن أن تسمى بمواقع positions العملية العشوائية. فإذا كان $X(t)=i$ فإنه يقال بأن العملية تكون في الحالة i عند اللحظة t.

ففي المثال (١ ،١) فإن حالات العملية العشوائية $\{X(n):n\in T\}$ تكون 1، 2، 3، 4، 5، 6. يسمى التغير في قيم المتغير العشوائي $X(t)$ بالانتقال بين حالات العملية العشوائية.

أما في المثال (١ ،٣) فتكون حالات العملية العشوائية $\{Q(t):t\geq 0\}$ عبارة عن 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، . . . .

يمكن أن تكون حالات العملية العشوائية عبارة عن كميات عددية أو غير عددية (وصفية) وذلك بناءا على طبيعة العملية العشوائية. ففي نظرية الطوابير، على سبيل المثال، غالبا ما تكون الحالات عبارة عن عدد الزبائن الذين ينتظرون تقديم الخدمة. أما إذا كنا نهتم بوضع نموذج لدراسة حركة توصيل الأمتعة في نظام لشركة طيران، فإن الحالات في هذا النموذج ممكن أن تكون عبارة عن موضع الأمتعة عند أي لحظة، وهذا يكون عبارة عن مثالا لحالات غير عددية. نقوم بتخصيص قيما عددية اختيارية للحالات غير العددية ومن ثم يمكن أن نفكر في أن حالات النظام عند أي لحظة عبارة عن متغير عشوائي عددي.

تعريف (١ ،٣):

فئة جميع القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X(t)$ تسمى بفضاء حالة العملية العشوائية $\{X(t):t\geq 0\}$ state space ويرمز له بالرمز S .

ففي المثال (١ ،١) يكون فضاء الحالة هو $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. أما في المثال (١ ،٣) يكون فضاء الحالة هو $S=\{0,1,2,...\}$.

إذا كانت المجموعة S عبارة عن مجموعة منفصلة فإن العملية العشوائية $\{X(t):t\geq 0\}$ تسمى عملية عشوائية ذات فضاء حالة منفصل. وبالتالي فإن المثالين (١ ،١) و (١ ،٣) يعطيان مثالان لعمليتين عشوائيتين بفضاء حالة منفصل.

إذا كانت المجموعة S عبارة عن مجموعة متصلة ، أي أن $S\subset(-\infty,\infty)$ ، فإن

العملية العشوائية $\{X(t):t\geq 0\}$ تسمى عملية عشوائية ذات فضاء حالة متصل. العمليتان العشوائيتان المعرفتان في المثالين (١ ،٢) و (١ ،٤) تكونان عمليتين عشوائيتين بفضاء حالة متصل.

تعريف (١ ،٤):

تسمى مجموعة جميع القيم الممكنة لمعلمة العملية العشوائية $\{X(t):t\geq 0\}$ بفضاء المعلمة (parameter space) ، ويرمز له بالرمز T .

في المثال (١ ،١) يكون $T=\{1,2,3,...\}$ و في المثال (١ ،٢) يكون $T=\{1,2,...,365\}$. في المثالين (١ ،٣) و (١ ،٤) فإن $T=\{t:t\geq 0\}\subseteq[0,\infty)$.

إذا كانت المجموعة T منفصلة فإن العملية العشوائية $\{X(t):t\geq 0\}$ تسمى بعملية عشوائية منفصلة الزمن discrete time stochastic process وفي هذه الحالة يمكن استخدام الرمز n بدلا من الرمز t ، ويكتب $X(n)$ أو X_n بدلا من $X(t)$ أو X_t.

إذا كانت المجموعة T متصلة، بمعنى $T=\{t:t\geq 0\}\subseteq[0,\infty)$، فإن العملية العشوائية $\{X(t):t\geq 0\}$ تسمى بعملية عشوائية متصلة الزمن continuous time stochastic process وفي هذه الحالة يمكن كتابة $X(t)$ على الصورة X_t.

العملية العشوائية في كل من المثالين (١ ،١) و (١ ،٢) تكون عملية عشوائية بزمن منفصل. أما العملية العشوائية في كل من المثالين (١ ،٣) و (١ ،٤) تكون عملية عشوائية بزمن متصل.

(١ ،٣) أنواع العمليات العشوائية
Types of stochastic processes

يتضح مما تقدم أنه يوجد لكل عملية عشوائية فضاء حالة S وفضاء معلمة T. إذا كان فضاء الحالة قابل للعد فإن العملية العشوائية تسمى سلسلة chain. علاوة على ذلك، إذا كانت السلسلة لها عدد منتهى من الحالات فإنها تكون محدودة. وهذا يقود إلى التصنيف التالي:

١. **سلسلة منفصلة الزمن** Discrete-time chain: كل من S ، T منفصل، كما في المثال (١ ،١). مثال آخر لهذا النوع هو $\{X(n): n = 0,1,\cdots\}$ حيث أن $X(n)$ يكون عبارة عن عدد أعواد الكبريت في الصندوق رقم n المنتج بواسطة عملية الإنتاج. إذا كانت السعة العظمى للصندوق هي 100 عود، فإن هذه السلسلة تكون محدودة وفضاء حالتها $S = \{0,1,...,100\}$.

٢. **عملية منفصلة الزمن** Discrete-time process: S متصل، T منفصل، كما في المثال (١ ،٢). أيضا بفرض أن W_n يكون عبارة عن الزمن الذي يجب انتظاره قبل تنفيذ البرنامج رقم n على جهاز كمبيوتر. إذن $\{W_n : n = 0,1,2,...\}$ تكون عملية عشوائية منفصلة الزمن متصلة الحالة.

٣. **سلسلة متصلة الزمن** Continuous-time chain: S منفصل، T متصل، كما في المثال (١ ،٣). أيضا، بفرض أن $N(t)$ يرمز إلى العدد الكلي لزبائن مطعم عند اللحظة t. إذن $\{N(t): t \in [0,\infty)\}$ تكون سلسلة متصلة الزمن.

٤. **عملية متصلة الزمن** Continuous-time process : كل من S ، T متصل، كما في المثال (١ ،٤). أيضا، تكون العملية $\{L(t): t \in [0,\infty)\}$ عبارة عن عملية عشوائية متصلة الزمن، حيث أن $L(t)$ يكون عبارة عن منسوب الماء عند سد ما في اللحظة الزمنية t. إذا كان أكبر قيمة لمنسوب الماء عند هذا السد هي 50 قدم، إذن فضاء الحالة لهذه العملية يكون $[0,50]$.

يمكن تلخيص هذه الأنواع الأربعة في الجدول التالي :

جدول (١ ،١): الأنواع الأربعة للعمليات العشوائية.

	فضاء المعلمة T منفصل (خطوة)	**فضاء المعلمة T متصل (زمن)**
فضاء الحالة S منفصل (سلسلة)	سلسلة منفصلة الزمن (محدودة/غير محدودة) $\{X_n : n = 0,1,2,...\}$	سلسلة متصلة الزمن (محدودة/غير محدودة) $\{N(t): t \in [0,\infty]\}$

فضاء الحالة S	عملية منفصلة الزمن $\{W_n : n = 0,1,2,...\}$	عملية متصلة الزمن $\{L(t) : t \in [0,\infty)\}$
متصل		

المحاضرة الثالثة

، إذا كان فضاء الحالة منفصل و فضاء المعلمة منفصل سنكتب $\{X_n : n \in T\}$ بدلا من $\{X(t) : t \in T\}$. من الآن فصاعدا سيتم التعامل في بقية هذا الكتاب مع العمليات العشوائية التي لها فضاء حالة منفصل. يمكن أن يكون فضاء الحالة فضاء ثنائي ، كما في المثال التالي.

مثال (١ ،٥):

أكتب فضاء الحالة وفضاء المعلمة للعملية العشوائية التي تمثل الأهداف المسجلة أثناء لعب مباراة كرة قدم.

الحل:

بفرض أن X_t ، Y_t عبارة عن متغيرين عشوائيين يمثلان على الترتيب الأهداف التي سجلها الفريق الأول والفريق الثاني حتى اللحظة t، ومن ثم فإن الزوج (X_t, Y_t) يمثل الأهداف المسجلة في المباراة حتى اللحظة t ، $0 \le t \le 90$. إذن العملية العشوائية التي تمثل هذه الظاهرة هي $\{(X_t, Y_t) : 0 \le t \le 90\}$ والتي يكون فيها فضاء الحالة $S = \{(x, y) : x, y = 0,1,2,...\}$ وفضاء المعلمة $T = \{t : 0 \le t \le 90\}$. تبدأ هذه العملية من الحالة $(0,0)$ ثم عندما يُسجل هدف تنتقل إلى الحالة $(1,0)$ إذا كان الفريق الأول هو الذي بدأ بالتسجيل ، أو إلى الحالة $(0,1)$ إذا كان الفريق الثاني هو الذي بدأ بالتسجيل وهكذا، وبشكل عام فإن هذه العملية ستنتقل من الحالة $(x, y) \in S$ إلى أي من الحالتين $(x+1, y) \in S$ إذا سجل الفريق الأول أو إلى الحالة $(x, y+1) \in S$ إذا سجل الفريق الثاني.

يمكن أن تأخذ المتغيرات العشوائية X_1 ، X_2 ، ... أي نوع من الكميات (عددية أو وصفية) كما يمكن أن تكون معتمدة على بعضها البعض أو تكون مستقلة شرطيا. في المثال التالي تكون المتغيرات العشوائية Y_1 ، Y_2 ، ... مستقلة بينما تكون المتغيرات العشوائية X_1 ، X_2 ، ... غير مستقلة وجميعها تأخذ كميات عددية.

مثال (١ ،٦):

اختار علي أحد الأسهم التجارية للمضاربة في البورصة السعودية، وأنه في كل يوم سيكسب ريالا واحدا باحتمال 1/2 أو يخسر ريالا باحتمال 1/2. بفرض أن المتغير X_n هو مكسب علي بعد عدد n من الأيام:

١. أوجد فضاء الحالة و فضاء المعلمة للعملية العشوائية $\{X_n : n \in T\}$.

٢. أثبت أن : $E[X_n] = 0$ ، $Var[X_n] = n$.

الحـل:

١. حيث أن القيم الممكنة للمتغير n تكون 1، 2، 3،... إذن فضاء المعلمة يكون $T = \{1, 2, 3, ...\}$ ، وحيث أن القيم الممكنة للمتغير العشوائي X_n هي $0, \pm 1, \pm 2, ...$، إذن فضاء الحالة للعملية العشوائية يكون $S = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ ، بالتالي فإن العملية العشوائية $\{X_n : n \in T\}$ تكون عملية عشوائية منفصلة الزمن منفصلة الحالة (سلسلة منفصلة الزمن).

٢. بفرض أن Y_i متغير عشوائي يمثل مكسب علي في اليوم رقم i، إذن :

$$Y_i = \begin{cases} +1, & \text{باحتمال } \frac{1}{2} \\ -1, & \text{باحتمال } \frac{1}{2} \end{cases}$$

وبالتالي فإن :

$$E[Y_i] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad ، \quad Var[Y_i] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

ولكن X_n يرتبط بـ Y_i بالعلاقة :

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

إذن

$$E[X_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[Y_i] = 0$$

وحيث أن المتغيرات العشوائية Y_1 ، Y_2، ... Y_n مستقلة ، إذن:

$$Var[X_n] = \sum_{i=1}^{n} Var[Y_i] = \sum_{i=1}^{n} 1 = n .$$

نقدم الأمثلة الثلاث التالية حتى يتمكن القارئ من فهم تصور العمليات العشوائية

وفضاء الحالة وفضاء المعلمة فهما جيدا.

مثال (١ ،٧):

بفرض أننا ألقينا قطعتي عملة معا خمسين مرة، ونفترض أننا سننجح إذا ظهر على سطحي القطعتين نفس الشيء (كتابة أو صورة) ونفشل خلاف ذلك. ليكن X_n هو عدد مرات النجاح حتى الرمية رقم n. هذه اللعبة تمثل بعملية عشوائية $\{X_n : n \in T\}$ منفصلة الزمن منفصلة الحالة، حيث أن: $T = \{1, 2, ..., 50\}$ ، $S = \{0,1,2,...,50\}$.

مثال (١ ،٨):

بفرض أن لدينا صندوقين أ ، ب وأننا وضعنا فيهما ثلاث كرات بيضاء وخمس كرات خضراء بشرط أن يحتوي كل منهما على أربع كرات. بفرض أننا أجرينا عملية سحب متكررة من الصندوقين، و في كل عملية نقوم بسحب كرة عشوائيا من كل صندوق ثم نقوم بعكس موضعي الكرتين (نضع الكرة المسحوبة من الصندوق أ في الصندوق ب، والعكس). ليكن X_n هو عدد الكرات البيضاء في الصندوق أ بعد إجراء عملية السحب رقم n. من الواضح أن $\{X_n : n \in T\}$ تكون عملية عشوائية منفصلة الزمن منفصلة الحالة، حيث أن: $T = \{1, 2, 3, ...\}$ ، $S = \{0,1,2,3\}$. بالمثل إذا كان Y_n هو عدد الكرات الخضراء في الصندوق أ بعد إجراء عملية السحب رقم n، فإن $\{Y_n : n \in T\}$ تكون عملية عشوائية منفصلة الزمن منفصلة الحالة، حيث أن: $T = \{1, 2, 3, ...\}$ ، $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

مثال (١ ،٩):

باعتبار عدد الطلاب المقبولين للدراسة في جامعة الملك سعود كل عام، علما بأن جامعة الملك سعود فتحت عام 1957. ليكن $X(1957)$ يرمز إلى عدد الطلاب المقبولين في الجامعة في عام 1957 وأن $X(1958)$ يرمز إلى عدد الطلاب المقبولين في عام 1958 ،... إلخ. بالتالي يمكن تمثيل عدد الطلاب المقبولين بجامعة الملك سعود كل عام بعائلة من المتغيرات العشوائية $\{X(n) : n = 1957,1958,...\}$ والتي تعتبر مثالا لعملية عشوائية منفصلة الزمن منفصلة الحالة.

(١ ،٤) خواص العمليات العشوائية
Properties of stochastic processes

يمكن إلقاء بعض الضوء حول العمليات العشوائية بدون الخوض في خواصها

البنائية. غالباً ما يهتم الباحثين بدراسة بناء نموذج للعلاقة بين قيم $X(n)$ أو $X(t)$ عندما تتحرك (تتغير) العملية مع الزمن. في أبسط الأنظمة تكون المتغيرات العشوائية $X(n)$ مستقلة. وهذا يعني أن الناتج في وقت ما لا يتأثر بالنواتج في الأزمنة الأخرى. كمثال على ذلك نتائج عملية تكرار إلقاء زهرة نرد غير متميزة. وفي بعض الأنظمة الأخرى تتأثر نتيجة $X(n)$ عند وقت ما بجميع النتائج السابقة. كمثال على ذلك بفرض أنه يتم سحب أعداد عشوائية واحد بعد الآخر وبدون إحلال من صندوق يحتوي على الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100. فمن الواضح أن العدد الذي سيتم سحبه في المستقبل يعتمد على جميع الأعداد التي سحبت من قبل.

فيما يلي بعض الخواص الهامة الأخرى للعمليات العشوائية.

١. **العملية العشوائية ذات زيادات مستقلة** independent increments : تسمى العملية العشوائية $\{X(t):t\in T\}$ بعملية عشوائية ذات زيادات مستقلة إذا كانت المتغيرات العشوائية $X(t_2)-X(t_1)$ ، $X(t_3)-X(t_2)$ ، ... ، $X(t_n)-X(t_{n-1})$ مستقلة لجميع اختيارات الأزمنة t_1 ، t_2 ، ... ، t_n والتي تحقق $t_1<t_2<...<t_n$.

بمعنى آخر : في العملية العشوائية ذات الزيادات المستقلة تكون كميات التغيير في حالة العملية العشوائية على فترات غير متداخلة مستقلة.

٢. **العملية العشوائية ذات زيادات مستقرة (ثابتة)** stationary increments : تسمى العملية العشوائية $\{X(t):t\in T\}$ بعملية عشوائية ذات زيادات مستقرة إذا كان توزيع المتغير العشوائي $X(t+s)-X(t)$ مستقل عن t. وهذا يعني أن التوزيع الاحتمالي لكمية تغير حالة العملية العشوائية خلال فترة معينة $[t,t+s]$ يعتمد فقط على طول الفترة s ولا يعتمد على بدايتها t.

٣. **العملية العشوائية ذات خاصية ماركوف** Markovian property **:** يقال للعملية العشوائية $\{X(t):t\in T\}$ أنها تتمتع بخاصية ماركوف إذا كانت حالتها في المستقبل، بشرط معرفة حالاتها في الماضي والحاضر، لا تتأثر إلا بحالتها الحاضرة فقط، أي أن حالة العملية في الماضي ليس لها أي تأثير على حالتها في المستقبل بشرط معرفة حالتها في الحاضر. وهذا يعني أنه لكل لحظة زمنية u فإن المتغير العشوائي $X(t)$ ، $t>u$ يكون مستقل عن المتغير العشوائي $X(t)$ ، $t<u$ بشرط معرفة المتغير العشوائي $X(u)$. العملية العشوائية

التي تتمتع بخاصية ماركوف تسمى عملية ماركوف.

المحاضرة الرابعة

العملية العشوائية منفصلة الزمن منفصلة الحالة تحقق خاصية ماركوف إذا تحقق الشرط التالي:

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n=i,\ X_{n-1}=i_{n-1},...,X_1=i_1,X_0=i_0)= P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$$

لجميع الحالات $j,i,i_{n-1},...,i_1,i_0$ ولكل n. يمكن تفسير هذه الخاصية كالآتي: التنبؤ بقيمة X_{n+1} يعتمد فقط على القيمة الحالية لـ X_n ولا يعتمد على قيم الحالات الماضية $X_{n-1},...,X_1,X_0$.

بمعنى آخر: بإعطاء الحالة الحالية X_n فإن الحالات الماضية $X_{n-1},...,X_1,X_0$ لا تؤثر على الحالات في المستقبل X_{n+1} ، X_{n+2} ، . . . .

الأمثلة التالية تمكن القارئ من فهم خاصية ماركوف فهما جيدا.

مثال (١٠، ١):

بفرض إلقاء قطعة عملة معدنية غير متميزة عشر مرات وأن X_n يرمز إلى العدد الكلي للصور التي تظهر حتى الرمية رقم n. يقود هذا الفرض إلى العملية العشوائية $\{X_n : n=1,2,...\}$ بفضاء الحالة $S=\{0,1,2,...,10\}$ وفضاء المعلمة $T=\{1,2,...,10\}$ وأن:

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n=i,\ X_{n-1}=i_{n-1},...,X_1=i_1)= \begin{cases} \frac{1}{2}, & j=i+1,(i=0,1,2,...,9) \\ \frac{1}{2}, & j=i,(i=0,1,2,...,10) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

من الواضح أن هذا الاحتمال الشرطي يعتمد على i فقط ولا يعتمد على $i_1,i_2,...i_{n-1}$ ، وهذا يعني أنه بمعرفة X_n فإن X_{n+1} لا يعتمد على أي من $X_1,...,X_{n-1}$ ، وبالتالي فإن هذه العملية تحقق خاصية ماركوف ومن ثم فإن $\{X_n : n=1,2,...\}$ تكون سلسلة ماركوف.

مثال (١، ١١):

بالعودة إلى المثال (١، ١٠) ولكن بفرض أن قطعة العملة متميزة وأن احتمال ظهور كتابة يساوي ثلاث أضعاف احتمال ظهور صورة، أي أن:

$$P(\text{صورة}) = 1/4, \quad P(\text{كتابة}) = 3/4$$

إذن:

$$P(X_3 = 2 \mid X_2 = 1,\ X_1 = 1) = P(\text{ظهور صورة في الرمية الثالثة}) = \frac{1}{4}$$ ،

أيضا:

$$P(X_3 = 2 \mid X_2 = 1,\ X_1 = 0) = P(\text{ظهور صورة في الرمية الثالثة}) = \frac{1}{4}$$ ،

$$P(X_3 = 2 \mid X_2 = 2,\ X_1 = 1) = P(\text{ظهور كتابة في الرمية الثالثة}) = \frac{3}{4}.$$

لاحظ أن جميع هذه الاحتمالات الشرطية تعتمد فقط على قيمة X_2 ومستقلة عن قيمة X_1. بالمثل يمكن حساب أن:

$$P(X_4 = 3 \mid X_3 = 3, X_2 = 1,\ X_1 = 1) = \frac{3}{4},$$

$$P(X_4 = 3 \mid X_3 = 2, X_2 = i_2,\ X_1 = i_1) = \frac{1}{4},$$

$$P(X_4 = 4 \mid X_3 = 3, X_2 = i_2,\ X_1 = i_1) = \frac{1}{4},$$

$$P(X_4 = 5 \mid X_3 = 3, X_2 = i_2,\ X_1 = i_1) = 0.$$

لاحظ ثانية أن هذه الاحتمالات الشرطية تعتمد فقط على قيمة X_3 ومستقلة عن قيم كل من X_1 ، X_2. عموما يمكن حساب أن:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i,\ X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1) =$$

$$\begin{cases} 1/4, & j = i+1, (i = 0,1,2,...,9) \\ 3/4, & j = i, (i = 0,1,2,...,10) \\ 0\ , & \text{otherwise} \end{cases}$$

يعتمد هذا الاحتمال الشرطي فقط على قيمة i ولا يعتمد على قيم $i_1, i_2, ..., i_{n-1}$. ومن ثم فإنه عندما يكون قيمة X_n معلومة فإن قيمة X_{n+1} لا تعتمد على أي من $X_1, ..., X_{n-1}$. وهذا يبرهن على أن العملية العشوائية في هذا المثال تحقق خاصية ماركوف.

مثـال (١ ،١٢):

تتكون لعبـة بسيطة من إلقاء قطعـة عملـة غير متميزة العديد من المرات، وأن اللاعب سيكسب ريـالاً واحداً كلمـا ظهرت صورة ويخسر ريـالاً واحداً كلمـا ظهرت كتابة. ليكن X_n عبارة عن المكسب التراكمي للاعب بعد إلقاء القطعة رقم n، حيث أن القيمة السالبة تشير إلى الخسارة الفعلية وأن $X_0 = 0$. العملية العشوائية $\{X_n : n = 1,2,...\}$ في هذا المثـال تحقق خاصية مـاركوف. ولتوضيح ذلك سنقدم الحالـة الخاصـة التاليـة. نفترض أن اللاعب أصبح يمتلك رصيدا تراكميـا مقداره ست ريـالات وذلك بعد إلقاء قطعـة العملـة عشـرة مـرات. يلاحظ أن معرفـة مـا جرى من خسـارة أو مكسب خـلال المحـاولات التـي تسـبق المحاولـة العاشـرة لـيس لهـا أي تـأثير علـى معرفـة المكسـب التراكمي للاعب بعد إلقاء القطعـة الحاديـة عشر ، فـإن المكسب التراكمـي بعد إجـراء المحاولة الحاديـة عشر سيصـبح إمـا سبع ريـالات باحتمـال $\frac{1}{2}$ أو خمس ريـالات بنفس الاحتمال. وهذا يعني أن المكسب التراكمي بعد المحاولة الحادية عشر يعتمد فقط علـى المكسب التراكمي للاعب بعد المحاولة العاشرة. وحيث أنه من الواضح أن هذه النتيجـة تتحقق لبـاقي جميـع المحـاولات، إذن العمليـة العشـوائية فـي هذا المثـال تحقق خاصـية ماركوف.

(١ ،٥) بعض العمليات العشوائية الشائعة
Some common stochastic processes

فيما يلي نقدم بإيجاز قائمـة لبعض العمليـات العشـوائية الخاصـة والتـي يكـون لكل منهـا تعريفها الخاص وخواصـها وتطبيقاتها.

١. **عملية برنوللي Bernoulli process** . تسمى العمليـة العشـوائية $\{X_n : n = 1,2,...\}$ بعملية **برنوللي** باحتمال النجاح p $(0 \le p \le 1)$ إذا تحقق الشرطان:

(أ) تكون المتغيرات العشوائية X_1 ، X_2 ، ... مستقلة.

(ب) $P(X_n = 1) = p$ ، $P(X_n = 0) = q = 1 - p$ لكل $n = 1,2,...$

فضـاء المعلمـة لعمليـة برنـوللي $\{X_n : n = 1,2,...\}$ عبـارة عـن فضـاء منفصـل ويعطـى علـى الصـورة $T = \{1,2,...\}$ ، وفضـاء الحالـة أيضـا يكـون فضـاء متقطـع ويعطـى بـ $S = \{0,1\}$.

مثال (١، ١٣):
تقوم أحد الشركات لتجميع أجهزة معينة بفحص روتيني لكل جهاز يتم تجميعه فيها. فإذا كان الجهاز رقم n معيباً فإنه يتم وضع $X_n = 1$ وأما إذا كان سليماً فيتم وضع $X_n = 0$. بفرض أن عملية الإنتاج تخضع لنظام دقة معين فإن المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \ldots$ تكون مستقلة وإذا كان احتمال الحصول على نظام معيب p ثابت مع الزمن، فإن العملية العشوائية $\{X_n : n = 1,2,\ldots\}$ تكون مثالاً لعملية برنوللي باحتمال النجاح p .

٢. **عملية ذي الحدين Binomial process.** بفرض أن العملية العشوائية $\{X_n : n = 1,2,\ldots\}$ تكون عملية برنوللي باحتمال النجاح p . ليكن :

$$S_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ X_1 + X_2 + \ldots + X_n, & n = 1,2,,\ldots \end{cases} \qquad (١، ١)$$

عبارة عن عدد مرات النجاح خلال المحاولات الأولى حتى إتمام المحاولة رقم n . إذن العملية العشوائية $\{S_n : n = 0,1,2,\ldots\}$ تسمى عملية **ذي الحدين،** حيث أن:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,2,\ldots,n$$

فضاء الحالة وفضاء المعلمة لعملية ذي الحدين يأخذا نفس الصورة والتي تساوي $\{0,1,2,\ldots\}$.

٣. **عملية بواسون Poisson process.** عملية **بواسون** بمعدل λ تكون عبارة عن عملية عشوائية، مثلا $\{N_t : t \geq 0\}$ ، ذات قيمة صحيحة وتحقق الخواص التالية:

١. $N_0 = 0$

٢. المتغيرات العشوائية $N_{t+s} - N_t$ تتبع توزيع بواسون بمتوسط λs ، وذلك لجميع $t > 0$ ، $s > 0$.

٣. المتغير العشوائي N_t يكون له زيادات مستقلة.

فضاء الحالة لعملية بواسون $\{N_t : t \geq 0\}$ يكون منفصل حيث $S = \{0,1,2,\ldots\}$ أما فضاء المعلمة فهو متصل حيث $T = \{t : t \geq 0\}$. تنتشر تطبيقات عملية بواسون في العديد

من المجالات، علي سبيل المثال : نموذج لعملية وصول الزبائن لمتجر ما، نموذج لعدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى محول المكالمات، نموذج وصول الجسيمات المشعة لعداد جيجر، ... الخ.

٤. **عملية جاوس Gaussian process.** تسمى العملية العشوائية $\{X_t : t \geq 0\}$ بعملية **جاوس** إذا كان متجه المتغيرات العشوائية $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ يسلك التوزيع الطبيعي المتعدد لجميع القيم $t_1, t_2, ..., t_n \in [0, \infty)$ ولكل $n \geq 1$.

فضاء الحالة وفضاء المعلمة لعملية جاوس يكونا متصلين. تظهر عملية جاوس في العديد من التطبيقات في مجالات الهندسة الكهربائية، علي سبيل المثال : كنموذج لتأثير تغير الجهد الكهربائي على المقاومات، نموذج تأثير الضوضاء الحاصلة على جهاز الاستقبال على عملية الاتصالات الإلكترونية.

٥. **عملية ونر Wiener process.** تسمى العملية العشوائية $\{W_t : t \geq 0\}$ بعملية **ونر** إذا حققت الشروط التالية:

١. $W_0 = 0$

٢. $\{W_t : t \geq 0\}$ تكون ذات زيادات مستقرة ومستقلة.

٣. لكل $t > 0$، فإن المتغير العشوائي W_t يتبع التوزيع الطبيعي بالمتوسط 0 والتباين $c^2 t$، حيث c كمية حقيقية.

فضاء الحالة وفضاء المعلمة لعملية جاوس يكونا متصلين. تسمى عملية ونر أحيانا بعملية **حركة براون** Brownian motion process. تظهر عملية ونر في العديد من التطبيقات في مجالات ميكانيكا الكم ، والظواهر المتداخلة والاقتصاد وغيرها من التطبيقات.

٦. **عملية أورنستين-أوهلنبك The Ornstein-Uhlenbeck process.** لتكن $\{W_t : t \geq 0\}$ عبارة عن عملية ونر، وبتعريف المتغير العشوائي U_t، لبعض قيم $\alpha > 0$، على الصورة:

$$U_t = e^{-\frac{\alpha t}{2}} W_{e^{\alpha t}}, \; t \geq 0$$

إذن العملية العشوائية $\{W_t : t \geq 0\}$ تسمى عملية **أورنسين-أوهلنبك**.

فضاء الحالة وفضاء المعلمة لهذه العملية يكونا متصلين. ظهرت هذه العملية عند دراسة نموذج لوصف سرعة جسيم مغمور في سائل أو غاز، والتي تفيد في الميكانيكا الإحصائية.

(١ ،٦) تمارين

(١,١) بفرض تجربة تتكون من مشاهدة تسريع عربة سباق عند اللحظة الزمنية X_t خلال الدقيقة الأولى في السباق. وبفرض أن Y_t، Z_t سرعة وموضع العربة عند اللحظة . أوصف فضاء الحالة وفضاء المعلمة للعمليات العشوائية $\{X_t : t \geq 0\}$، $\{Y_t : t \geq 0\}$، $\{Z_t : t \geq 0\}$.

(٢,١) يتم تسجيل درجات حرارة الظهيرة في ميناء الملك فهد الدولي كل يوم لمدة عام ابتداء من الأول من يناير. ينتج من هذه العملية متتابعة من القياسات لدرجة، أوصف العملية العشوائية التي تناسب هذه الظاهرة.
لاحظ أن الدارسين قد اعتادوا على عمل استدلال لنوعين من متوسطات العمليات العشوائية وهما:

أ) متوسطات المجموعة مثل: متوسط درجة الحرارة أثناء الظهيرة في التاسع عشر من فبراير عام 1999.

ب)متوسطات الزمن مثل: متوسط درجة الحرارة أثناء الظهيرة لعام 2002.

(٣,١) بفرض أن M_t يمثل عدد المكالمات المستلمة عند عامل تحويل مكالمات تليفونية عند اللحظة t، في كل الثانية خلال فترة زمنية طولها خمسة عشر دقيقة. أوصف:

أ) عملية عشوائية تناسب هذه الظاهرة.

ب) متوسط المجموعة.

ت) متوسط الزمن.

(٤,١) عرف عمليات عشوائية لقياس درجات الحرارة في التمرين (٢,١) بشرط أن تكون هذه العملية:

أ) منفصلة الزمن (المعلمة) منفصلة القيمة (الحالة).

ب) منفصلة الزمن (المعلمة) متصلة القيمة (الحالة).

ت) متصلة الزمن (المعلمة) منفصلة القيمة (الحالة).

ث) متصلة الزمن (المعلمة) متصلة القيمة (الحالة).

(١,٥) يمكن اختيار نموذج بسيط لدرجة الحرارة اليومي في التمرين (١,٢) بتعريف C_n على الصورة:

$$C_n = 16\left[1 - \cos\frac{2\pi n}{365}\right] + 4X_n$$

حيث أن $X_1, X_2, \ldots$ تكون عبارة عن متتابعة من المتغيرات العشوائية المستقلة والتي لها جميعا التوزيع الطبيعي المعياري. أوجد متوسط C_n.

(١، ٦) يمكن اختيار نموذج آخر لدرجة الحرارة اليومي في التمرين (١,٢) بتعريف C_n على الصورة:

$$C_n = \frac{1}{2}C_{n-1} + 4X_n$$

حيث أن $C_0, X_1, X_2, \ldots$ تكون عبارة عن متتابعة من المتغيرات العشوائية المستقلة والتي لها جميعا التوزيع الطبيعي المعياري. أوجد متوسط وتباين C_n .