



5-2: تحليل التباين لمعياريين Two-Way Classification Analysis of Variance

سيتم التطرق في حالة تحليل التباين لمعياريين باختصار إلى الشكل العام أو المخطط الخاص بالتجربة ذات التصنيف بمعياريين وإلى جدول تحليل التباين لمثل هذه التجارب باعتبار أن الطالب قد أخذ فكرة مبسطة لطرق تقدير التباين سابقا وكذلك كيف يمكن التوصل إلى توزيع (F) وعليه يستطيع الطالب أن يسير بنفس تلك الخطوات ماعدا أنه ستضاف في هذه الحالة مركبة جديدة .
 إن المخطط العام للتجارب ذات التصنيف بمعياريين يمكن أن يكون كما في الجدول (7-2) الآتي :

جدول (7-2) مخطط البيانات بالرموز

المجموعات أو العينات (الأعمدة)	1	2	...	j	...	r	المجموع $y_{i.}$	المتوسط $\bar{y}_{i.}$
المجموعات أو العينات (المصفوف)								
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1j}	...	y_{1r}	$y_{1.}$	$\bar{y}_{1.}$
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2j}	...	y_{2r}	$y_{2.}$	$\bar{y}_{2.}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	y_{i1}	y_{i2}	...	y_{ij}	...	y_{ir}	$y_{i.}$	$\bar{y}_{i.}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
t	y_{t1}	y_{t2}	...	y_{tj}	...	y_{tr}	$y_{t.}$	$\bar{y}_{t.}$
المجموع $y_{.j}$	$y_{.1}$	$y_{.2}$...	$y_{.j}$...	$y_{.r}$	$y_{..}$	
المتوسط	$\bar{y}_{.1}$	$\bar{y}_{.2}$...	$\bar{y}_{.j}$...	$\bar{y}_{.r}$		$\bar{y}_{..}$

يلاحظ من المخطط أعلاه أن هناك اتجاهين من المجموعات أو العينات ، المجموعات الصفية وأخرى عمودية . أما الفرق بين هذا المخطط وذلك المخطط الخاص بالتجارب ذات التصنيف بمعياريين واحد فهو أن كل مشاهدة في المخطط الحالي تتبع نوعين من المجموعات ، أما هناك فكانت كل مشاهدة تتبع مجموعة واحدة ، كما أن عدد المشاهدات هنا ثابت في كل مجموعة فهو t في المجموعات العمودية و r في المجموعات الصفية . أما هناك فأن

الفصل الثاني

المشاهدات في كل مجموعة قد يكون متساو أو لا يكون . أن المتطابقة الأساسية لتحليل التباين لمعيارين هي :

$$\sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum \sum (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + \sum \sum (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 + \sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2$$

بعبارة أخرى أن مجموع المربعات الكلي يمكن تقسيمه الى المركبات التالية :

$$\sum \sum (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \text{ مج مربعات الانحرافات لبين الصفوف وهو}$$

$$\sum \sum (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 \text{ مج مربعات الانحرافات لبين الأعمدة وهو}$$

$$\sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2 \text{ مج مربع الخطأ وهو}$$

وهو يساوي كذلك مج المربعات الكلي مطروحا منه مجموع المربعات لبين الصفوف مطروحا منه مج المربعات لبين الأعمدة .

ملاحظة: يمكن اعتماد صيغ مبسطة لحساب مجاميع المربعات للصفوف وللأعمدة وللخطأ أعلاه وإستخدامها في جدول تحليل التباين الذي يصبح كما في الجدول (8-2) أدناه:

جدول (8-2)

تحليل التباين لمعيارين

S.O.V	d.f	S.S	M.S	F
بين المجموعات العنقودية (Rows)	t-1	$SSR = \sum_i \frac{y_{i.}^2}{r} - \frac{y_{..}^2}{tr}$	$MSR = \frac{SSR}{t-1}$	$\frac{MSR}{MSE}$
بين المجموعات العمودية (Columns)	r-1	$SSC = \sum_j \frac{y_{.j}^2}{t} - \frac{y_{..}^2}{tr}$	$MSC = \frac{SSC}{r-1}$	$\frac{MSC}{MSE}$
(Error)	(t-1)(r-1)	$SSE = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \sum_i \frac{y_{i.}^2}{r} - \sum_j \frac{y_{.j}^2}{t} + \frac{y_{..}^2}{tr}$	$MSE = \frac{SSE}{(t-1)(r-1)}$	
Total الكلي	tr-1	$\sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{tr}$		



وأن مجد المربعات لمركبة الخطأ يستخرج من مجد المربعات الكلي - مجد المربعات لبين المجموعات (الصفية - مجد المربعات لبين المجموعات (العمودية) .
كذلك فإن درجات الحرية لمركبة الخطأ يمكن أن تستخرج من: درجة حرية الكلي - درجة حرية بين المجموعات (الصفية) - درجة حرية بين المجموعات (العمودية).

1-5-2: النماذج الخطية في تحليل التباين لمعيارين :

1-1-5-2: النماذج المقيدة والعشوائية:

تطبق المفاهيم والخطوات الخاصة بالنماذج المقيدة والعشوائية هنا سوى أن البيانات تكون مصنفة باتجاهين أي أن مشاهدة تكون واقعة تحت تأثيرين: الأول T_i والثاني B_j والنموذج هو :

$$Y_{ij} = \mu + T_i + B_j + e_{ij} \quad \dots\dots(2-20)$$

فعندما تكون $\sum B_j = 0, \sum T_i = 0$ فإن النموذج مقيد ، أما إذا كان :

$$\sum B_j \neq 0, \sum T_i \neq 0$$

فإن النموذج عشوائي

2-1-5-2: النماذج المختلطة:

وهناك حالة أخرى من النماذج تسمى النماذج المختلطة (Mixed Model) وهي عندما تكون أما $\sum B_j$ أو $\sum T_i$ لاساوي صفر .

تجربة (2-2) :

في تجربة أجريت لمقارنة تأثير أربعة أصناف من القمح هي (a,b,c,d) زرعت في خمسة حقول مختلفة كل منها قسم إلى أربعة قطع صغيرة وزعت عليها أصناف القمح عشوائيا . والجدول (9-2) بي أدناه يبين حاصل القمح بالكم لكل قطعة تجريبية . المطلوب : اختبار معنوية الفرق بين أصناف القمح وكذلك معنوية الفرق بين الحقول .

الفصل الثاني

جدول (9-2) يبين حاصل القمح بالكتفم

الحقل صنف القمح	1	2	3	4	5	y _i
a	70	75	80	70	75	370
b	40	40	45	50	55	230
c	80	85	80	85	80	410
d	30	40	50	40	30	190
y _j	220	240	255	245	240	1200

الحل : باعتماد الصيغ المبسطة التي كتبت في جدول تحليل التباين (8-2) أعلاه يمكن حساب الآتي :

$$SST = (70)^2 + \dots + (30)^2 - (1200)^2 / 20 = 7350$$

مج المربعات الكلي هو : 7350

$$SS(\text{Rows}) = [(370)^2 + \dots + (190)^2] / 4 - (1200)^2 / 20 = 6800$$

مج المربعات بين المجموعات (الصفية) أو أصناف القمح هو :

$$SS(\text{Columns}) = [(220)^2 + \dots + (240)^2] / 4 - (1200)^2 / 20 = 162.5$$

مج المربعات للخطأ هو :

$$S.S \text{ error} = S.S.T - S.S (\text{Rows}) - S.S (\text{Columns}) = 387.5$$

وعليه فإن جدول تحليل التباين يمكن أن يكون وفق هذا الجدول (10-2) أدناه:

جدول (102)

يبين تحليل التباين لبيانات التجربة (2-2)

S.O.V	d.F	S.S	M.S	F	F _{table}
الحقول Fields	4	162.5	40.625	1.258	3.26
الأصناف Varieties	3	6800	2266.667	70.197	3.49
الخطأ Error	12	387.5	32.29		
الكلي Total	19	62.92			

بما أن قيمة F للحقول أقل من قيمة F الجدولية فهذا يعني أن الفروق بين الحقول غير معنوية. وبما أن قيمة F لأصناف القمح أكبر من قيمة F الجدولية فهذا يعني أن الفروق بين أصناف القمح معنوية.



أسئلة وتمارين الفصل الثاني

س1: اختبر تجانس التباينات للمجموعات الآتية عند مستوى 0.05 بطريقة:

(1) بارتلت Bartlett

(2) كوكران Cochran

	المجموعات		
	1	2	3
	33	10	21
	29	12	21
	30	11	18
	28	9	16
	29	13	22

س2 (1) وضح ماذا تعني التحويلات Transformations , وضح أنواعها باختصار .

(2) اوجد نتيجة التوقع للآتي :

$$E \left[\frac{\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^r (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{..})^2}{t-1} \right] , \quad E \left[\frac{\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^r (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2}{tr-1} \right]$$

(3) وضح بشكل مختصر الفروض الواجب تحققها لتحليل التباين .

س3: لثلاث عينات توفرت المعلومات الآتية :

$$S_1^2 = 9, n_1 = 3, \quad S_2^2 = 8, n_2 = 6, \quad S_3^2 = 4, n_3 = 3$$

اختبر الفرضية :

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \sigma_3^2$$

باستخدام طريقة بارتلت Bartlett علما أن قيمة χ^2 الجدولية هي 5.99

س4: البيانات في أدناه تمثل النتائج التي حصل عليها أربع مجموعات من الطلبة في احد

الامتحانات:

الفصل الثاني

المجموعات					
a	60	64	63	65	59
b	80	81	82	83	77
c	71	69	72	65	69
d	57	59	55	58	57

المطلوب: (1) إجراء تحليل التباين واختبار الفروق بين مجموعات الطلبة على مستوى دلالة 0.05

(2) إذا فقدت النتيجة 57 والنتيجة 59 من المجموعة d . فكيف يتم إجراء تحليل التباين.

س5: البيانات في أدناه تمثل النتائج التي حصل عليها مجموعات من الطلبة في احد الامتحانات مقسمين حسب المرحلة الدراسية والقسم العلمي :

القسم	إدارة الأعمال	الإدارة العامة	الاقتصاد	الدارة الصناعية	المحاسبة
المرحلة الأولى	70	54	73	66	63
الثانية	90	71	92	84	81
الثالثة	81	59	82	64	73
الرابعة	67	50	65	59	61

المطلوب : إجراء تحليل التباين واختبار معنوية الفروق بين المراحل الدراسية وكذلك بين الأقسام العلمية على مستوى دلالة 0.05

س6: اوجد نتيجة التوقع الآتي :

$$E \left[\frac{\sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^r (y_{ij} - \bar{y}_i - \bar{y}_j + \bar{y})^2}{(t-1)(r-1)} \right]$$

س7: ماهي الفروق بين النموذج الأول (Model I) والنموذج الثاني (Model II) وأعط مثال لكل منهما .