

(المحاضرة الأولى)

مفهوم التكامل

التكامل هو عملية معاكسة لعملية الاشتقاق، ويرمز له بالرمز \int وان الرمز

$\int \dots dx$ يعني التكامل بالنسبة الى x

$\int \dots dy$ يعني التكامل بالنسبة الى y

قواعد التكامل غير المحدد

اولاً: تكامل دالة الثابت:

$$\int a dx = ax + c$$

حيث ان c يمثل ثابت التكامل.

مثال: اوجد قيمة التكامل التالي:

1. $\int 6 dx = 6x + c$

2. $\int -dx = -x + c$

ثانياً: تكامل الدالة:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

حيث ان c يمثل ثابت التكامل.

مثال: اوجد قيمة كل من التكاملات التالية:

1. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$

2. $\int \sqrt[3]{x^2} dx = x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c$

ثالثاً: التخلص من الأقواس اذا كانت الأقواس ليس لها اس

مثال: جد التكامل التالي:

$$\begin{aligned}
1. \int (2x + 5)(x + 1)dx &= \int (2x^2 + 2x + 5x + 5)dx \\
&= \int (2x^2 + 7x + 5)dx = \int 2x^2 dx + \int 7x dx + \int 5dx \\
&= \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + 5x
\end{aligned}$$

رابعاً: اذا كان احد الأقواس مرفوع الى اس وكان القوس الثاني هو مشتقة داخل القوس الأول، فإننا نكامل القوس الأول فقط ونقسم على الاس الجديد ونضيف ثابت c

مثال: اوجد قيمة التكامل التالي:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-2}{(x^2-4x+5)} dx &= \frac{1}{2} \int (x^2-4x+5)^{-2} (2x-4) dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{(x^2-4x+5)^{-1}}{-1} + c
\end{aligned}$$

خامساً: تكامل دالة الجيب هو:

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$$

ان الحالة لهذه القاعدة هي:

$$\int \sin^n(ax) dx = -\frac{\sin^{n-1}(ax) \cos(ax)}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(ax) dx \text{ for } n > 0$$

$$a \neq 0$$

وإذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا:

$$\int u' \sin(u) dx = -\cos(u) + c$$

سادساً: تكامل دالة الجيب تمام هو:

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$$

ان الحالة لهذه القاعدة هي:

$$\int \cos^n(ax) dx = \frac{\cos^{n-1}(ax) \sin(ax)}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(ax) dx \text{ for } n > 0$$

$$a \neq 0$$

وإذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا:

$$\int u' \cos(u) dx = \sin(u) + c$$

سابعاً: تكامل دالة الظل هو:

$$\int \tan(x) dx = -\ln |\cos(x)| + c$$

ان الحالة لهذه القاعدة هي:

$$\int \tan^n(ax) dx = -\frac{1}{a(n-1)} \tan^{n-1}(ax) - \int \tan^{n-2}(ax) dx \text{ for } n \neq 1$$

$$a \neq 0$$

ثامناً: تكامل دالة القاطع هو:

$$\int \sec(x) dx = \ln |\sec(x) + \tan(x)| + c$$

ان الحالة لهذه القاعدة هي:

$$\int \sec^n(ax) dx = \frac{\sec^{n-2}(ax) \tan(ax)}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(ax) dx \text{ for } n \neq 1$$

$$a \neq 0$$

تاسعاً: تكامل دالة القاطع تمام هو:

$$\int \csc(x) dx = -\ln |\csc(x) + \cot(x)| + c$$

ان الحالة لهذه القاعدة هي:

$$\int \csc^n(ax) dx = -\frac{\csc^{n-1}(ax) \cos(ax)}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2}(ax) dx \text{ for } n \neq 0$$

$$a \neq 0$$

تاسعاً: تكامل الدالة الأسية هو:

$$\int e^{cx} dx = \frac{1}{c} e^{cx} + a \quad c \neq 0$$

$$\int a^{cx} dx = \frac{1}{c \ln(a)} a^{cx} + d \quad c \neq 0, a > 0, a \neq 1$$

عاشراً: تكامل الدالة اللوغاريتمية هو:

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + c$$

$$\int \log_b(x) dx = x \log_b(x) - x \log_b e + c$$