الفصل الأول

الاحتمالات وتطبيقاتها

Probabilities and its Applications

1.1 مقدمة

كلمة "احتمال" هي كلمة ينطق بها الكثير من الناس، فبعض خبراء الأرصاد الجوية يقولون من المحتمل سقوط أمطار اليوم، احتمال ارتفاع في درجات الحرارة، وبعض خبراء البورصة يقولون احتمال ارتفاع قيمة الأسهم المتداولة في سوق المال لشركة معينة، خلال هذا اليوم، واحتمال نجاح طالب، واحتمال إصابة نوع معين من الفاكهة بنوع من البكتريا، وهكذا، يكثر نطق الأفراد بها وربما يجهلون معناها. فماذا تعني كلمة احتمال؟

يقصد بهذه الكلمة فرصة حدوث أو وقوع حادثة معينة، وتستخدم الاحتمالات في كثير من النواحي التطبيقية، مثل المجالات الاقتصادية، والتجارية، والزراعية، والطبية، والسلوكية، وغيرها، خاصة عند اتخاذ القرار في دراسات الجدوى، والتنبؤ بسلوك الظواهر المختلفة، ولكي يمكن فهم موضوع الاحتمال، وأهميته في النواحي التطبيقية، نقوم بعرض بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمالات.

2.1 بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمال

- **التجربة العشوائية Randomized Experiment**

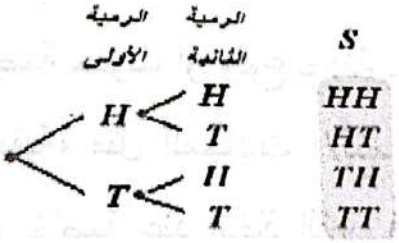
هي أي عملية تتم يمكن تحديد كل النتائج الممكنة لها، ولكن لا يمكن مسبقا تحديد النتيجة التي ستظهر أو تحدث، ومثال على ذلك عند إلقاء قطعة عملة معدنية مرة واحدة، فإن النتائج الممكنة لها نتيجتان هما: "ظهور الصورة" ويرمز لها بالرمز H، أو "ظهور الكتابة" ويرمز لها بالرمز T، أي أن النتائج الممكنة: {H , T} ، وقبل إلقاء القطعة، لا يمكن تحديد أي من النتيجتين سوف تظهر.

- **فضاء العينة Sample Space**

هي مجموعة النتائج الكلية للتجربة، ويرمز لها بالرمز S، ويرمز لعدد النتائج المكونة لفضاء العينة بالرمز $n(S)$، ومن الأمثلة على ذلك:

1- عند إلقاء قطعة عملة مرة واحدة، نجد أن فضاء العينة هو: S: {H , T } ، وعدد النتائج: $n(S) = 2$.

2- عند إلقاء قطعة عملة مرتين (إلقاء قطعتين مرة واحدة)، فإن فضاء العينة يمكن الحصول عليه من خلال شجرة الاحتمالات كما يلي:



أي أن $n(S) = 4$

3- عند رمي زهرة نرد (زار) مرة واحدة، فإن فضاء العينة هو مجموعة عدد النقاط التي تظهر على الوجه، وهي: S:{1, 2, 3, 4, 5, 6} ، أي أن : $n(S) = 6$.

4- عند رمي زهري نرد (زارين) مرة، فإن فضاء العينة هو مجموعة عدد النقاط التي

تظهر على الوجهين، وهي:

S

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$n(S)=36$

3.1 انواع الحوادث Events

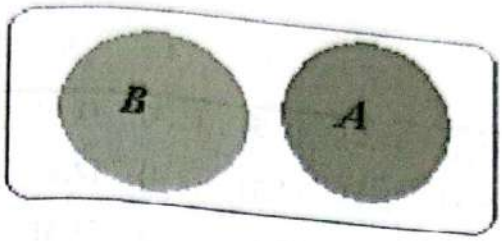
- **الحوادث ذات الفرص المتساوية Equally Likely Events**

إذا كانت النتائج الممكنة للتجربة العشوائية تمتلك فرصاً متساوية ولكل نقطة فيها نفس الفرصة بالظهور مثال ذلك رمي قطعة نقود فإن النتائج الممكنة هي (صورة H)، (كتابة T) فلكل منهما نفس الفرصة بالظهور أو عند حدوث ولادة جديدة في العائلة فإن فرصة أن يكون ولداً مساوية لفرصة أن تكون بنتاً.

- **الحوادث المتنافية Mutually Exclusive Events**

إذا كانت A، B حادثتين متنافيتين معرفتين على فضاء العينة S فإن حدوث A ينفي حدوث B أي أنهما لا يمكن أن يحدثا معاً في نفس المحاولة. فإذا رمينا قطعة نقود فإن نتيجة هذه المحاولة (هذه الرمية) ستكون إما صورة (H) أو كتابة (T) ولا يمكن ظهور الصورة والكتابة معاً في نفس الرمية أو المحاولة وكذلك إذا كان المنتج صالحاً لا يمكن أن يكون معيباً وإذا كان معيباً لا يمكن أن يكون صالحاً في إنتاج الوحدة الواحدة للماكنة. ورياضياً $A \cap B = \emptyset$ ، ويمكن تمثيلها بشكل " العالم

فين كما في الشكل الآتي:



لا توجد نتائج مشتركة $A \cap B = \emptyset$

- **الحوادث المستقلة Independent Events**

وهي الحوادث التي لا يؤثر حدوث أحدها على الآخر أي أن ظروف حدوث الحادثة A لا علاقة له بظروف الحادثة B فتحديد كفاءة الموظف A لا علاقة له بتحديد كفاءة الموظف B العاملين في مؤسسة واحدة ولنفس نوع العمل. وعند إجراء اختبار لجودة الإنتاج بمنتج معين فإن مطابقة المنتج الأول للمواصفات لا يؤثر على مطابقة المنتج الثاني لمواصفات الجودة.

- **الحوادث المتممة (المكملة) Compliment Event**

الحدث المكمل للحدث A هو الذي ينفي وقوعه، بمعنى آخر هو الحادث الذي يشمل كل نتائج التجربة باستثناء النتائج المكونة للحدث A، ويرمز للحادث المكمل بالرمز $\overline{A}$، ومن ثم نستنتج أن :

$$(A \cup \overline{A}) = S \ , \ (A \cap \overline{A}) = \phi$$

4.1 التباديل Permutation

المقصود بالتباديل لـ n من الأشياء هو تركيبها بكل الطرق الممكنة للترتيب ولو أن لنا r من الأشياء بحيث أن $r<n$ فإن وضع هذه الأشياء في ترتيب معين يسمى بالتباديل n من الأشياء مأخوذة لـ r في كل مرة لذا فإن تباديل r من الأشياء مأخوذة من n هو:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

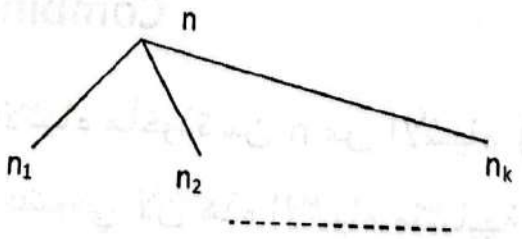
مثال(1): ما عدد التباديل الممكنة لحرفين من أربعة حروف A، B، C، D.

$$P_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

أي أن هناك (12) طريقة للترتيب وهي:

AB, AC, AD, BC, BD, CD, BA, CA, DA, CB, DB, DC

أما إذا كانت المجموعة n التي يراد ترتيبها وهي تحتوي على مجموعات متشابهة تماماً هي n_1 للمجموعة الأولى و n_2 لمجموعة الثانية و ... n_k للمجموعة k.



فإن عدد التباديل في هذه الحالة يساوي

$$\frac{n!}{n_1!n_2!.....n_k!}$$

مكتبة الضاد
طباعة - نشر - تو
بغداد - الوزير
700302079

مثال(2): كم كلمة يمكن تكوينه من أحرف الكلمة REMEMBER

الحرف R	$n_1 = 2$
الحرف M	$n_2 = 2$
الحرف E	$n_3 = 3$
الحرف B	$n_4 = 1$
$n =$	8

فإذا أردنا جميع التراتيب الممكنة لهذه الحروف في هذه الكلمة أو تكوين كلمة تحتوي على هذه الحروف فإن عدد التراتيب الممكنة هي

$$\frac{8!}{2!\,2!\,3!\,1!} = 1680$$

مثال(3): كم عدد يمكن تكوينه من الأرقام 2222، 33، 444

الحل:

$$\frac{9!}{3!\,2!\,4!} = 1260$$

5.1 التوافيق Combination

التوافيق لـ r من الأشياء مأخوذة من n من الأشياء (بدون أخذ الترتيب بنظر الاعتبار أي أن السحب عشوائي لأن هذه الأشياء متشابهة تماماً من حيث الظاهرة المدروسة). ويعرف وفقاً للعلاقة:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{P!}{r!}$$

مثال (4): أراد أحد المديرين اختيار لجنة مشتريات مؤلفة من (3) موظفين وكان عدد المرشحين للجنة ثمانية موظفين، أوجد عدد اللجان التي يمكن تكوينها.

الحل:

$$C_3^8 == \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$$

مثال(5): تم الإعلان عن الحاجة لتعيين خمسة موظفين في أحد المؤسسات الحكومية وقد تقدم للتعيين (7) رجال و (5) نساء.

1) ما عدد الطرائق التي يتم فيها اختيار الموظفين الخمسة.
2) ما عدد الطرائق التي يتم فيها اختيار الموظفين الخمسة إذا كان المطلوب (3) رجال و (2) نساء.
3) ما عدد الطرائق التي يمكن فيها اختيار الموظفين الخمسة بحيث يكون على الأقل رجل واحد فيما بينهم.

الحل:

1) C_5^{12}=792

2) $C_3^7 C_2^5$=35X10 =350

3) $C_1^7 C_4^5 + C_2^7 C_3^5 + C_3^7 C_2^5 + C_4^7 C_1^5 + C_5^7$=35+210+350+175+ 21=791

مثال (6): يؤدي طالب امتحاناً وتحتوي ورقة الأسئلة الإمتحانية على (10) عشرة أسئلة وجب أن يجيب الطالب على (8) منها فقط.

1) ما عدد الطرائق الممكنة للإجابة على الأسئلة.
2) ما عدد الطرائق الممكنة للإجابة على الأسئلة أذا كانت الاسئلة الثلاثة الاولى اجبارية .
3) ما عدد الطرائق الممكنة للإجابة عن الأسئلة على أن يجيب في الأقل ثلاثة أسئلة من أول خمسة أسئلة.
4) ما عدد الطرائق الممكنة للإجابة عن الأسئلة على أن يجيب على الأكثر أربعة من أول خمسة أسئلة.

الحل:

1) أن يترك اثنين من الأسئلة C_8^{10} او أن يختار ثمانية من الأسئلة C_8^{10}

2) $C_3^3 C_5^7 = 21$

3) $C_3^5 C_5^5 + C_4^5 C_4^5 + C_5^5 C_3^5 = 10 + 25 + 10 = 45$

4) $C_4^5 C_4^5 + C_3^5 C_5^5 = 25 + 10 = 35$

ملاحظة:

$$C_n^n = 1$$
$$C_0^n = 1$$
$$C_1^n = n$$
$$C_r^n = C_{n-r}^n$$

6.1 تعريف الاحتمال Probability Definition

يعتمد حساب الاحتمال من الناحية النظرية على أسس وقواعد الرياضيات، ويعد هذا النوع من الاحتمال هو العنصر الأساسي في الاستدلال الإحصائي، ولكن في المجال التجريبي تعتمد الاحتمالات على النتائج الفعلية لمشاهدات التجربة، وعلى تكرار الحادث محل الاهتمام، فإذا رمزنا لاحتمال وقوع الحادث A بالرمز P(A) فان

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}\ ,\ 0\le P(A)\le 1$$

إذ أن:

n(S) يمثل عدد النتائج الكلية للتجربة، (عدد مفاهيم الحدث)

n(A) يمثل عدد النتائج الممكنة لوقوع الحادث A (عدد مفاهيم فضاء العينة)

مع ملاحظة أن قيمة الاحتمال تكون محصورة دائماً بين الصفر والواحد الصحيح وان الاحتمال المكمل لاحتمال حدوث الحادثة A المعرفة على فضاء العينة S يعرف بالشكل الاتي

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

مثال(7): في شعبة من شعب المؤسسة العامة للكهرباء (6) موظفين و (7) موظفات، قررت المؤسسة نقل (4) منهم لفتح شعبة جديدة وعرفت الحوادث كما يلي:

A: نقل (2) من الموظفين و (2) من الموظفات.

B: نقل (4) من الموظفين.

C: نقل (4) من الموظفات.

مكتبة الضاد
طباعة - نشر - توزيع
بغداد - الوزيرية
07700302079

والمطلوب إيجاد احتمال كل حدث من الحوادث أعلاه:

الحل:

$$1)\ P(A)=\frac{C_2^6 C_2^7}{C_4^{13}}=\frac{15\times 21}{715}=\frac{315}{715}$$

$$2)\ P(B)=\frac{C_4^6 C_0^7}{C_4^{13}}=\frac{15}{715}$$

$$3)\ P(C)=\frac{C_0^6 C_4^7}{C_4^{13}}=\frac{35}{715}$$

مثال(8): في الإنتاج اليومي لأحد المعامل كان (3) من المنتجات معيبة (غير جيدة) من بين (8) وحدة منتجة سحبت واحدة من المنتجات عشوائياً من الإنتاج اليومي للمعمل:

1) ما احتمال أن تكون معيبة.
2) ما احتمال أن تكون غير معيبة (جيدة).

الحل:

- لنعرف الحادثة A على أساس أنها تمثل الحصول على منتج معيب.
- لنعرف الحادثة B على أساس أنها تمثل الحصول على منتج صالح (غير معيب).
- لاحظ أن الحادثة B هي حادثة مكملة للحادثة A أي أن $B=\overline{A}$

$$1)\ P(A)=\frac{C_1^3}{C_1^8}=\frac{3}{8}$$

$$2)\ P(B)=\frac{C_1^5}{C_1^8}=\frac{5}{8}$$

$$P(A)+P(\overline{A})=\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=1$$

مثـال(9): عند إلقاء أو رمي زهرة نرد غير متحيزة مرتين، فأوجد ما يلي:

1) احتمال ظهور وجهين متشابهين (ظهور نفس النتائج).
2) احتمال ان تكون القيمة المطلقة للفرق ما بين الوجهين (الزارين) تساوي 1.
3) احتمال ان يكون حاصل ضرب الوجهين (الزارين) تساوي 6.
4) احتمال ظهور وجهين مجموع نقاطهما 10. (مجموع الوجهين يساوي 10).

الحـل: أن نتائج فضاء العينة هي:

S

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$n(S)=36$

لنعرف أن الحادثة A هو حادث ظهور وجهين متشابهين، فإن:

$A:\{(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (4,4)\ (5,5)\ (6,6)\},\ n(A)=6$

ويكون احتمال ظهور وجهين متشابهين هو :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

1) لنعرف أن الحادثة B هي القيمة المطلقة للفرق ما بين الوجهين (الزارين) تساوي 1:

$B:\{(1,2)\ (2,1)\ (2,3)(3,2)\ (3,4)\ (4,3)\ (4,5)\ (5,4)\ (5,6)\ (6,5)\},\ n(B)=10$

ويكون احتمال القيمة المطلقة للفرق ما بين الوجهين (الزارين) تساوي 1 هو :

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

2) لنعرف أن الحادثة C هي حاصل ضرب الوجهين (الزارين) تساوي 6:

$C:\{(1,6)\ (6,1)\ (2,3)(3,2)\},\ n(C)=4$

ويكون احتمال حاصل ضرب الوجهين (الزارين) تساوي 6 هو

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

3) لنعرف أن الحادثة D هو حادث ظهور وجهين مجموع نقاطهما 10

$B:\{(4,6)\ (5,5)\ (6,4)\},\ n(D)=3$

ويكون احتمال ظهور وجهين مجموع نقاطهما 10 هو

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$