$$1\text{-}P(D) = P(I)P(D|I) + P(II)P(D|II) + P(III)P(D|III)$$
$$= \frac{1}{3}(0.05) + \frac{1}{3}(0.10) + \frac{1}{3}(0.08)$$
$$= 0.076$$

$$2\text{-}P(G) = P(I)P(G|I) + P(II)P(G|II) + P(III)P(G|III)$$
$$= \frac{1}{3}(0.95) + \frac{1}{3}(0.90) + \frac{1}{3}(0.92)$$
$$= 0.923$$

$$3\text{-}P(III|D) = \frac{P(III)P(D|III)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{3}(0.08)}{0.076} = 0.35$$

$$4\text{-}P(II|G) = \frac{P(II)P(G|II)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{3}(0.90)}{0.923} = 0.325$$

8.1 المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

Random Variables and Probability Distributions

المتغير العشوائي هو الذي يأخذ قيما حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج فراغ العينة، ومن ثم مجال هذا المتغير، يشمل كل القيم الممكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين، وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

1.8.1 المتغيرات العشوائية المتقطعة Discrete Random Variables

المتغير العشوائي المنفصل هو الذي يأخذ قيم بينية، ومتباعدة، ويرمز للمتغير العشوائي بشكل عام بحرف من الحروف الأبجدية الكبيرة.... X, Y, Z, ويرمز للقيم التي يأخذها المتغير بالحروف الأبجدية الصغيرة، ... x, y, z ، ومن أمثلة هذه

المتغيرات:

1. عدد الأولاد الذكور في الأسرة المكونة من أربع أولاد X ، X:{x=0,1,2,3,4}
2. عدد الزبائن الذين يتم إنهاء خدمتهم البنكية كل 10 دقائق Y، {Y:{y=0,1,2,3,....
3. عدد الوحدات التالفة من إنتاج مزرعة معينة تنتج 200وحدة كل موسم.
4. عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر.

فإذا كان المتغير العشوائي المنفصل X يأخذ القيم، $X:\{x=x_1,x_2,...,x_n\}$، وكان $P(X=x_i)=f(x_i)$ هو احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ القيمة x_i، فإنه، يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، وهو جدول مكون من عمودين، الأول به القيم الممكنة للمتغير $X:\{x=x_1,x_2,...,x_n\}$، والثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير $P(X=x_i)=f(x_i)$، وكما موضح في الجدول ادناه :

x_i	$f(x_i)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
⋮	⋮
x_n	$f(x_n)$
Σ	1

جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل

وتسمى الدالة $f(x_i)$ بدالة الكتلة الاحتمالية، ومن خصائص هذه الدالة ما يلي:

أ- إن كل قيمة من قيم دالة الكتلة الاحتمالية تقع بين الصفر والواحد الصحيح $0\le f(x_i)\le 1$

ب- إن مجموع الاحتمالات المقابلة لكل قيم المتغير العشوائي المنفصل مساوٍ إلى

الواحد الصحيح أي أن: $\sum_{\forall x} f(x_i) = 1$

تعريف

أن الدالة التجميعية للمتغير العشوائي المنفصل c. d. f. تعرف الدالة التجميعية للمتغير العشوائي بالشكل بالآتي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\text{اقل قيمة الى } x}^{x} f(x)$$

تعريف

إذا كانت X_1، X_2، ..... ،X_n تمثل قيم المتغير العشوائي X وكانت $P(x_1)$ ، $P(x_2)$، ... ... ،$P(x_n)$ تمثل الاحتمال المقابل لكل قيمة من قيم X فإن التوقع الرياضي الفردي يمثل متوسط قيم المتغير X ويمكن تعريفه بأنه مجموع حاصل ضرب قيم X في الاحتمالات المقابلة لها.

$$E(X) = x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2) + ... + x_n P(x_n)$$

أما التباين فإنه يعرف كالآتي:

$$\sigma_x^2 = V(X) = EX^2 - (EX)^2$$

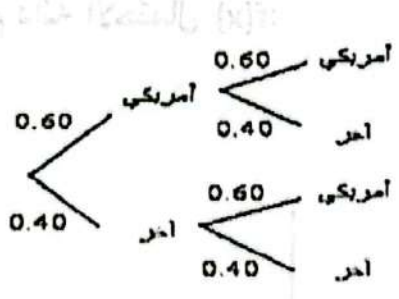
مثال(19): إذا كان من المعلوم أن نسبة مبيعات أحد المراكز التجارية من التفاح الأمريكي 0.60 ، بينما يكون نسبة مبيعاته من الأنواع الأخرى للتفاح 0.40، اشترى أحد الزبائن صندوقين، والمطلوب:

1) كون فضاء العينة.

2) إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الصناديق المشتراة من التفاح الأمريكي، فأوجد الآتي:

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.
- ارسم دالة الاحتمال لهذا المتغير.
- كون التوزيع الاحتمالي التجميعي.
- ما هو احتمال $P(X=1)$ ، $P(X\le 1)$ ، $P(X=1.5)$ ، $P(X\le 1.5)$
- الوسط الحسابي والتباين لعدد الصناديق المشتراة من النوع الأمريكي.
- اذا كان لدينا (200) من صناديق التفاح المشتراة ، فما هو عدد الصناديق المتوقع شرائها على ان يقل عن عبوتين خلال شهر

الحل: تكوين فضاء العينة: التجربة هنا هو شراء وحدتين من صناديق التفاح، ومن ثم فراغ العينة يتكون من أربع نتائج، هي:



		X	$P(X=x)=f(x_i)$
(أمريكي، أمريكي)		2	0.36
(آخر، أمريكي)		1	0.24
(أمريكي، آخر)		1	0.24
(آخر، آخر)		0	0.16

- ان التوزيع الاحتمالي لعدد الصناديق المشتراة من التفاح الأمريكي X

من المعلوم أن الزبون اشترى عبوتين، وأن المتغير العشوائي هو عدد الصناديق المشتراة من التفاح الأمريكي، لذا تكون القيم الممكنة للمتغير العشوائي هي:

(x=0) إذا كانت العبوتين من النوع الآخر، أي إذا كانت نتيجة التجربة (آخر، آخر).

(x=1) إذا كان أحد العبوتين من النوع الأمريكي، أي إذا كانت نتيجة التجربة (آخر، أمريكي) أو (أمريكي، آخر).

(x=2) إذا كان العبوتين من النوع الأمريكي، أي إذا كانت نتيجة التجربة

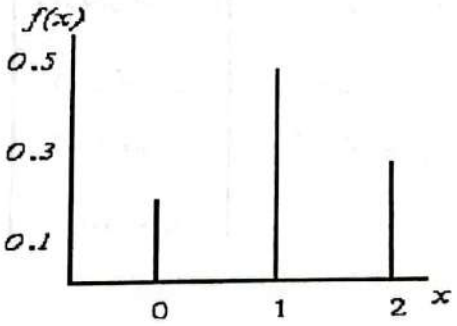
(أمريكي، أمريكي)

ومن ثم يأخذ المتغير القيم: X: {x=0,1,2} ، ويرتبط احتمالات هذه القيم باحتمالات نتائج التجربة المناظرة لها كما هو مبين أعلاه، ومن ثم يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو:

x_i	$f(x_i)$
0	0.16
1	0.48
2	0.36
Σ	1

جدول التوزيع الاحتمالي لعدد الصناديق المشتراة من التفاح الأمريكي

- **رسم دالة الاحتمال f(x):**



- **تكوين التوزيع الاحتمالي التجميعي:**

يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي التجميعي لعدد الوحدات المشتراة من التفاح الأمريكي كما يلي:

x_i	$f(x_i)$	$F(x_i)$
0	0.16	$F(0) = P(X \le 0) = 0.16$
1	0.48	$F(1) = P(X \le 1) = 0.16 + 0.48 = 0.64$
2	0.36	$F(2) = P(X \le 2) = 0.64 + 0.36 = 1.00$
Sum	1	

جدول التوزيع الاحتمالي، والتوزيع التجميعي لعدد الصناديق المشتراة من التفاح الأمريكي

- **حساب الاحتمالات:**

$$P(X=1)\ ،\ P(X\le 1)\ ،\ P(X=1.5)\ ،\ P(X\le 1.5)$$

$$P(X=1)=f(1)=0.48$$
$$P(X\le 1)=F(1)=0.64$$
$$P(X=1.5)=f(1.5)=0$$
$$P(X\le 1.5)=F(1.5)=F(1)=0.64$$

- لحساب الوسط الحسابي والتباين يتطلب تكوين جدول يشمل المجاميع التالية: x_i^2 , $\sum x_i^2\ f(x_i)$, $\sum x_i\ f(x_i)$، وذلك كما يلي:

x_i	x_i^2	$f(x_i)$	$x_i f(x_i)$	$x_i^2 f(x_i)$
0	0	0.16	0	0
1	1	0.48	0.48	0.48
2	4	0.36	0.72	1.44
Sum		1	1.20	1.92

إذا الوسط الحسابي هو: $\mu=\sum x_i\ f(x_i)=1.20$

والتباين وهو: $\sigma^2=\sum x_i^2\ f(x_i)-\mu^2=1.92-(1.20)^2=0.48$

- إذا كان لدينا (200) من صناديق التفاح المشتراة، فما هو عدد الصناديق المتوقع شرائها على ان يقل عن عبوتين خلال شهر

$$Expected\ No.of\ Package\ =200\ *\ P(X\le 1)=200*F(1)$$
$$=200(0.16+0.48)=200(0.64)=128$$

مثال(20): فيما يلي التوزيع الاحتمالي لعدد الوحدات التي تستهلكها شركة الاطياف لمستحضرات التجميل والعطور من أحد مساحيق النظافة خلال الشهر X،

$$f(x_i)=\frac{x_i+c}{18} \quad x_i=1,2,3,4$$

والمطلوب:

أوجد الثابت c

1-احسب الوسط والتباين لعدد الوحدات المستهلكة.

2-كون جدول التوزيع التجميعي $F(x)$ ثم أوجد الآتي:

أ-نسبة الأسر التي يقل استهلاكها عن وحدتين

ب-نسبة الأسر التي يزيد استهلاكها عن 3 وحدات

الحل:

1-

$$\Rightarrow \sum_1^4 f(x_i)=1 \Rightarrow \sum_1^4 \frac{x_i+c}{18}=1$$

$$\Rightarrow \frac{1+c}{18}+\frac{2+c}{18}+\frac{3+c}{18}+\frac{4+c}{18}=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{18}[10+4c]=1$$

$$\Rightarrow 4c=8 \Rightarrow c=2$$

2-

x_i	x_i^2	$f(x_i)$	$x_i f(x_i)$	$x_i^2 f(x_i)$
1	1	3/18	3/18	3/18
2	4	4/18	8/18	16/18
3	9	5/18	15/18	45/18
4	16	6/18	24/18	96/18
Sum		1	50/18	160/18

إذا الوسط الحسابي هو: $\mu = \sum x_i \; f(x_i) = 50/18$

والتباين وهو: $\sigma^2 = \sum x_i^2 \; f(x_i) - \mu^2 = \frac{160}{18} - \left(\frac{50}{18}\right)^2 = \frac{95}{81}$

3-

x_i	$f(x_i)$	$F(x_i)$
1	3/18	$F(1) = P(X \le 1) = 3/18$
2	4/18	$F(2) = P(X \le 2) = 3/18 + 4/18 = 7/18$
3	5/18	$F(3) = P(X \le 3) = 7/18 + 5/18 = 12/18$
4	6/18	$F(4) = P(X \le 4) = 12/18 + 6/18 = 1$

$$P(X < 2) = P(X \le 1) = F(1) = 3/18$$

$$P(X > 3) = P(X \ge 4) = 1 - P(X \le 3) = 1 - F(3) = 1 - (12/18) = 6/18 = f(X = 4)$$

2.8.1 التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الخاصة

في كثير من النواحي التطبيقية، تتبع بعض الظواهر توزيعات احتمالية خاصة، وهي التوزيعات التي يمكن حساب احتمالات قيم المتغير عن طريق معادلة رياضية، تسمى بدالة الاحتمال $f(x)$ ، وهذه المعادلة لها معالم معينة، تسمى بمعالم المجتمع الذي ينسب له هذا التوزيع، وهذه المعالم ما هي إلا حقائق ثابتة مجهولة، وهي الأساس في حساب القيم الاحتمالية للتوزيع الاحتمالي للمجتمع محل الدراسة.
ومن أهم التوزيعات التي سيتم دراستها في هذا الكتاب، توزيع ثنائي الحدين، وتوزيع بواسون.

أ-توزيع ثنائي الحدين The Binomial Distribution

- إذا تكررت محاولة n من المرات، بحيث أن كل محاولة لها نتيجتان فقط متنافيتان هما:

- النتيجة محل الاهتمام " حالة نجاح " وتتم باحتمال ثابت في كل محاولة هو p
- النتيجة الأخرى " حالة فشل " وتتم باحتمال ثابت أيضا هو $q=1-p$

وبافتراض أن هذه المحاولات مستقلة، بمعنى أن نتيجة كل محاولة ليس لها علاقة بنتيجة المحاولة الأخرى، وإذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد حالات النجاح "عدد النتائج محل الاهتمام" في الـ n محاولة، فإن مدي المتغير العشوائي والذي يعبر عن عدد حالات النجاح هو: $X:\{x=0,1,2,...,n\}$، ومن ثم يحسب الاحتمال $P(X=x)=f(x)$ بتطبيق المعادلة التالية:

$$P(x)=C_x^n\,p^x\,q^{n-x}\quad,\quad x=0,1,2,...,n$$

إذ أن C_x^n هي عدد طرق اختيار x من وكما ذكر سابقاً: وان متوسط عدد حالات النجاح الذي يمثل القيمة المتوقعة لحالة النجاح هو:

$$\mu=np$$

وبتباين قدره

$$\sigma^2=npq$$

مثال(21): تقدم (10) أشخاص لإشغال وظيفة (وكان احتمال تعيين أحدهم مساو إلى احتمال عدم تعيينه) ما هو احتمال:

1-تعيين (4) منهم فقط.

2-ما احتمال عدم تعيين أي منهم.

3-ما احتمال تعيين على الأقل اثنان منهم.

4-ما احتمال تعيين على الأكثر اثنان فقط.

الحل:

$p=\frac{1}{2}$ $X= 0، 1، 2 \dots \dots ،10$

$q=1-p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

n = 10

فتكون الدالة الاحتمالية كالاتي

$$f(x)=C_x^{10}(\frac{1}{2})^x(\frac{1}{2})^{10-x} \quad X=0,1,2,\dots\dots,10$$

1.احتمال تعيين 4 منهم

$$P(X=4)=C_4^{10}(\frac{1}{2})^4(\frac{1}{2})^{10-4}=0.205$$

2. احتمال عدم تعيين أي منهم

$$P(X=0)=C_0^{10}(\frac{1}{2})^0(\frac{1}{2})^{10-0}=0.00097$$

3. احتمال تعيين على الاقل اثنين منهم

$$P(X\geq 2)=P(x=2)+P(X=3)+\dots\dots+P(X=10)$$

$$=C_2^{10}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^{10-2}\dots\dots+C_{10}^{10}(\frac{1}{2})^{10}(\frac{1}{2})^{10-10}=0.989$$

or

$$p(x\geq 2)=1-p(x<2)=1-\{p(x=0)+p(x=1)\}=0.989$$

4. احتمال تعيين على الاكثر اثنين منهم

$$p(x\leq 2)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)$$

$$=C_0^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{10-0}+C_1^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{10-1}+C_2^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{10-2}=0.0546$$

مثال (22): إذا كانت نسبة إنتاج سلعة معيوبة هي 1 لكل 7 وحدات منتجة فإذا تم إنتاج (15) وحدة ما هو احتمال:

1-وجود 3 سلع معيبة.

2-عدم وجود سلعة معيبة واحدة.

3-على الأقل سلعة واحدة معيوبة.

4-متوسط عدد الوحدات المعيبة في الإنتاج والتباين في العيوب.

الحل:

$$n=15 \qquad p=\frac{1}{7} \qquad q=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$

$$1\text{-}p(X=3)=C_3^{15}\left(\frac{1}{7}\right)^3\left(\frac{6}{7}\right)^{15-3}=0.208$$

$$2\text{-}\ p(X=0)=C_0^{15}\left(\frac{1}{7}\right)^0\left(\frac{6}{7}\right)^{15-0}=0.099$$

$$3\text{-}\ p(X\geq 1)=1-p(X\leq 1)=1-p(X=0)$$

$$=1-C_0^{15}\left(\frac{1}{7}\right)^0\left(\frac{6}{7}\right)^{15-0}$$

$$=1-0.099=0.9$$

$$4\text{-}\ E(X)=\mu=n.p=15\left(\frac{1}{7}\right)=2.142$$

$$V(X)=\sigma_x^2=n.p.q=15\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{6}{7}\right)=1.8367$$

ب-توزيع بواسون Poisson Distribution

يكثر استخدام هذا التوزيع في الحالات التي تقع فيها الأحداث وفقا لمعدلات زمنية، وكذلك في حالة الأحداث نادرة الوقوع، ومن أمثلة ذلك:

- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر. $X:\{x=0,1,2,...\}$
- عدد مرات سقي نوع معين من المحاصيل الزراعية خلال الموسم. $X:\{x=0,1,2,...\}$
- عدد الزبائن الذين يتم خدمتهم البنكية كل 10 دقائق. $X:\{x=0,1,2,...\}$
- عدد مرات زيارة المريض للطبيب كل سنة. $X:\{x=0,1,2,...\}$
- عدد مرات تناول الأسرة للحوم الحمراء خلال الأسبوع. $X:\{x=0,1,2,...\}$
- عدد أخطاء الطباعة لكل صفحة من صفحات الكتاب. $X:\{x=0,1,2,...\}$

إذا كان متوسط عدد مرات وقوع حادث وفقا لمعدل زمني معين هو $\mu = n * p$، وكان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد مرات وقوع الحادث وفقا لهذا المعدل، فإن مدي المتغير العشوائي X هو: $X:\{x=0,1,2,...\}$، وهذا المدى عبارة عن فئة مفتوحة من اليمين، فإن الاحتمال $P(X=x)=f(x)$ والذي يعبر عن احتمال وقوع الحادث عدد x من المرات وفقا لهذا المعدل، يحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$P(x)=\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}\quad ,\quad x=0,1,2,...$$

حيث أن e هي أساس اللوغاريتم الطبيعي، وتوجد في بعض الآلات الحاسبة، وقيمتها هي: $e=2.718$ تقريبا، ويمكن حساب قيمتها باستخدام الآلة الحاسوبية باتباع الخطوات التالية من الشمال إلى اليمين: مثلاً إيجاد $e^{-1.5}$

SHIFT e^x (-) 1.5 = النتيجة — 0.22323016

وأما $x!$ فتسمى "مضروب العدد x" ويساوي:

$x!=x(x-1)(x-2)..3\times2\times1$ وإن الوسط الحسابي لتوزيع بواسون والتباين (في حالة الاحتمال صغير وحجم عينة كبير) كالاتي:

$$E(x)=\mu=\sigma^2=np$$

مثال(23): إذا كان نسبة المعيب في المواد المنقولة من قبل أحدى الشركات هو 4% فإذا نقلت هذه الشركة (200) وحدة ما هو احتمال إن فيها:

1. أكثر من (3) وحدات معيبة.
2. على الأقل واحدة معيبة.
3. احسب متوسط المعيب والتباين.

الحل:

$$p=\frac{4}{100} \qquad n=200$$

$$\mu=n*p=200\left(\frac{4}{100}\right)=8$$

1) $p(x>3)=1-p(x\le3)$

$$=1-\{p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)\}$$

$$=1-\left\{\frac{e^{-8}8^0}{0!}+\frac{e^{-8}8^1}{1!}+\frac{e^{-8}8^2}{2!}+\frac{e^{-8}8^3}{3!}\right\}$$

$$=1-\{0.000335+0.00268+0.010734+0.0286\}$$
$$=1-\{0.04237\}=0.957$$

2) $p(x\geq 1)=1-p(p(x<1))=1-p(x=0)$

$$=1-0.000335=0.9996$$

3) $\mu=E(X)=\sigma^2=8$

مثال(24): لاحظ مدير أحد المصارف بأن هناك فترتين لذروة الطلب على عمليات الإيداع أثناء كل أسبوع. الأولى هي يوم السبت حيث يبلغ معدل الأخطاء 3 باليوم. ويوم الأربعاء ويبلغ معدل الأخطاء 4 باليوم. اجب عما يلي:

أ- ما احتمال عدم وجود أخطاء في عمليات الإيداع ليوم السبت؟

ب- ما احتمال ارتكاب خطأين في عمليات الإيداع ليوم الأربعاء؟

ت- ما احتمال ارتكاب أربعة أخطاء أو أكثر خلال يوم السبت؟

ث- ما احتمال عدم ارتكاب أخطاء يومي السبت والأربعاء؟

الحل:

$\mu=3$ ليوم السبت

$\mu=4$ ليوم الأربعاء

وعليه تكون دالة الكتلة الاحتمالية كالآتي:

$$p(X)=\frac{e^{-\mu}\mu^x}{X!} \qquad X=0,1,\ldots$$

أ- احتمال عدم وجود أخطاء في عمليات الإيداع ليوم السبت هي:

$$P_1(0)=\frac{3^0e^{-3}}{0!}=0.0497$$

ب- احتمال ارتكاب خطأين في عمليات الإيداع ليوم الأربعاء هي:

$$P2(2)=\frac{4^2e^{-4}}{2!}=0.1465$$

ت- احتمال ارتكاب أربعة أخطاء أو أكثر يوم السبت يعني مطروح منه احتمال ثلاث أخطاء أو اقل.

$$P(X\geq 4)=1-P(X\leq 3)$$

$$=1-[P(0)+P(1)+P(2)+P(3)]$$

$$P(0)=\frac{3^0e^{-3}}{0!}=0.0497$$

$$P(1)=\frac{3^1e^{-3}}{1!}=0.1493$$

$$P(2)=\frac{3^2e^{-3}}{2!}=0.2240$$

$$P(3)=\frac{3^3e^{-3}}{3!}=0.2240$$

$$p(X\geq 4)=1-(.0497+.1493+.224+.224)=0.353$$

ث- احتمال عدم ارتكاب خطأ يومي السبت والأربعاء يعني: $P_1(0)\cap P_2(0)$

من فرع (أ) يوم السبت $P_1(0)=0.0497$

ليوم الأربعاء $P_2(0)=\frac{4^0e^{-4}}{0!}=0.0183$