7.1 بعض قوانين الاحتمالات Probabilities Lows

1.7.1 قانون الجمع او الاتحاد

أ- إذا كانت A ، B حادثتين معرفتين غير متنافيتين على فضاء العينة S فإن احتمال اتحاد الحادثة A مع الحادثة B يمثل احتمال حدوث الحادثة (A) + احتمال حدوث الحادثة (B) مطروحاً منهم احتمال تقاطع الحادثة A والحادثة B أي أن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال(10): إذا كان نسبة المزارع التي تنتج خضروات 60% ، ونسبة المزارع التي تنتج فاكهة 75%، ونسبة المزارع التي تنتج الخضروات و الفاكهة 50%، أوجد الآتي:

1) ما احتمال أن مزرعة ما تنتج فاكهة أو خضروات؟

2) ما احتمال ألا تنتج المزرعة الفاكهة؟

الحل:

لنعرف أن A حادث يعبر عن "المزرعة تنتج خضروات "، B هو حادث يعبر عن " المزرعة تنتج فاكهة"، $A \cap B$ حادث يعبر عن "المزرعة تنتج خضروات والفاكهة "، فإن:

$$P(A) = 0.6 \ , \ P(B) = 0.75 \ , \ P(A \cap B) = 0.5$$

ويكون:

1) احتمال أن مزرعة ما تنتج فاكهة أو خضروات هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= (0.6) + (0.75) - 0.5 = 0.85$$

2) احتمال ألا تنتج المزرعة الفاكهة هو:

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.75 = 0.25$$

مثـــال(11): من بين 100 طالب، 45 نجح في امتحان مادة الاحصاء، 30 نجح في امتحان مادة الرياضيات، 25 نجح في امتحان مادة الادارة، في حين ان الطلبة الذين نجحوا في مادتي الاحصاء والرياضيات هم 14 طالب، وان الطلبة الذين نجحوا في مادتي الرياضيات والادارة هم 10 طالب، علماً ان الطلبة الذين نجحوا في مادتي الاحصاء والادارة هم 08 طالب. إذ تم اختيار الطلاب للمواد بصوره عشوائية فما احتمال بان الطالب

1) ينجح في مادتي الاحصاء أو الرياضيات.
2) ينجح في مادتي الاحصاء أو الادارة.

الحل:

لنعرف أن A حادث يعبر عن "الطالب الذي نجح في مادة الاحصاء".

B حادث يعبر عن "الطالب الذي نجح في مادة الرياضيات".

C حادث يعبر عن "الطالب الذي نجح في مادة الادارة".

ويكون:

1) ان ينجح الطالب في مادتي الاحصاء أو الرياضيات

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= (0.45) + (0.30) - (0.14) = 0.61$$

2) ان ينجح الطالب في مادتي الاحصاء أو الادارة

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$
$$= (0.45) + (0.25) - (0.08) = 0.62$$

ب- إذا كانت A ، B حادثتين معرفتين متنافيتين على فضاء العينة S فان

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

إذ أن في حالة الحوادث المتنافية

$$P(A \cap B) = 0$$

مثال(12): قرر أحد مفتشي الضرائب زيارة أحد المعامل للتعرف على سجلاتهم اليومية في أحد أيام العمل لأحد الأسابيع ما هو احتمال أن تكون الزيارة في أحد الأيام الزوجية في الأسبوع (اليوم الثاني أو الرابع أو السادس).

الحل:

$$P(2 \cup 4 \cup 6) = P(2) + P(4) + P(6)$$
$$P(2 \cup 4 \cup 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

ج- إذا كانت A، B حادثتين مستقلتين معرفة على فضاء العينة S فإن احتمال اتحاد A، B هو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

لأنه في حالة الحوادث المستقلة

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

مثال(13): إذا كان احتمال أن يصيب اللاعب A الهدف هو (1/4) واحتمال أن يصيبه اللاعب B هو (1/3) ما هو احتمال:

1) أن اللاعب A واللاعب B يصيبا الهدف.
2) أن يصاب الهدف (أن يصيبه A أو B).
3) أن لا يصاب الهدف.

الحل:

$$1- P(A \cap B) = P(A) * P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$2- P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) * P(B)) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$3- P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$4- p(A') = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$5- p(A) = 1 - p(A \cap B') = 1 - \frac{1}{12} = \frac{12-1}{12} = \frac{11}{12}$$

مثال (14): إذا رمينا قطعه نقدية ثلاث مرات في الهواء، ولنعرف الحوادث الاتي:

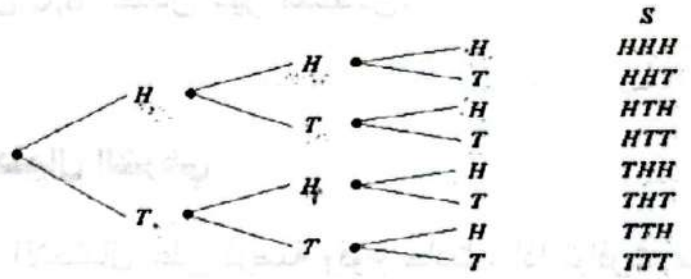
A: يمثل الرمية الأولى صوره

B: يمثل الرمية الثانية صورة

C: يمثل وقوع الصورة مرتين متتاليتين

فهل ان الاحداث A,B حدثان مستقلان أم B,C حدثان مستقلان

الحل: ان فضاء العينة يكون بالشكل الاتي



$$n(S)=8$$

وأما الأحداث هي:

$$A:\{HHH,HHT,HTH,HTT\},\ n(A)=4 \Rightarrow P(A)=1/2$$

$$B:\{HHH,THT,HHT,THH\},\ n(B)=4 \Rightarrow P(B)=1/2$$

$$C:\{HHT,THH\},\ n(C)=2 \Rightarrow P(C)=1/4$$

وعليه فان

$$(A\cap B)=\{HHH,HHT\} \Rightarrow n(A\cap B)=2 \Rightarrow P(A\cap B)=1/4$$

$$(B\cap C)=\{HHT,THH\}=C \Rightarrow n(B\cap C)=2 \Rightarrow P(B\cap C)=1/4$$

ونستنتج بان

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$
$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

وعليه فان الحدثان A,B حدثان مستقلان

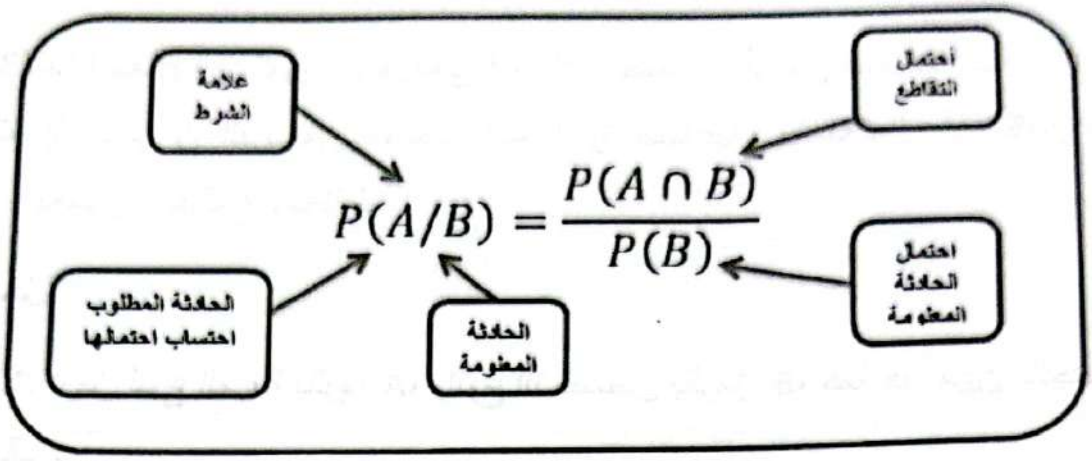
$$P(B \cap C) = P(B) * P(C)$$
$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$$

وعليه فان الحدثان B,C حدثان غير مستقلان.

2.7.1 قانون الاحتمال الشرطي

يستند هذا الاحتمال على فرصة وقوع حادث، إذا توافرت معلومات عن وقوع حادث آخر له علاقة بالحادث الأول، كاحتمال نجاح الطالب في مادة الإحصاء إذا علم أنه من الناجحين في مادة الاقتصاد، وكاحتمال استخدام المزرعة لنوع معين من السماد، إذا علم أنه يقوم بزراعة محصول معين، وكاحتمال أن الخريج يعمل بالقطاع الخاص، إذا علم أنه ممن تخرجوا من قسم معين من أقسام كلية الادارة، والأمثلة على ذلك كثيرة.

فإذا كان الحادث B حادث معلوم، والحادث A حادث آخر يراد حساب احتمال وقوعه، بمعلومية الحادث B، فإن هذا الاحتمال يحسب بتطبيق المعادلة التالية:



ويعرف الاحتمال $p(A|B)$ بقانون الاحتمال الشرطي، ويقرأ "احتمال وقوع الحادث A بمعلومية الحادث B"، أو يقرأ "احتمال وقوع الحادث A بشرط وقوع الحادث B"، يلاحظ أن الاحتمال الشرطي هو نسبة حادث التقاطع بين الحدثين إلى الحادث المعلوم

مثال(15): فيما يلي توزيع تكراري لعينة عشوائية حجمها 100 من خريجي الكلية في العامين الماضيين، حسب التخصص، ونوع المهنة:

المهنة / التخصص	قطاع عام	قطاع خاص	قطاع مختلط
بحوث العمليات	15	5	10
ادارة صناعية	8	17	10
محاسبة	12	10	13

فإذا اختير أحد الخريجين بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

1) ما احتمال أن يكون من خريجي قسم بحوث العمليات ويعمل بالقطاع الخاص.
2) ما احتمال أن يكون ممن يعملون بالقطاع العام أو من خريجي قسم ادارة صناعية.

3) ما احتمال أن يكون من خريجي قسم ادارة صناعية أو من قسم محاسبة.
4) إذا علم أن الفرد من خريجي قسم ادارة صناعية، ما احتمال أن يكون ممن يعملون بالقطاع المختلط.

الحل:

أولا: نرمز لنوع المهنة بالرمز A، ولنوع التخصص بالرمز B، كما هو مبين بالجدول التالي:

التخصص \ المهنة		قطاع عام A_1	قطاع خاص A_2	قطاع مختلط A_3	المجموع
بحوث العمليات	B_1	15	5	10	30
ادارة صناعية	B_2	8	17	10	35
محاسبة	B_3	12	10	13	35
المجموعType equation here.		35	32	33	100

ثانيا: التكرار في كل خلية يعبر عن عدد الخريجين الذين ينتمون لقسم معين ويعملون في مهنة معينة، أي يعبر عن عدد تكرارات حوادث التقاطع الممكنة $A \cap B$

1- حساب احتمال أن يكون من خريجي قسم بحوث العمليات ويعمل بالقطاع الخاص.

$$P(B_1 \cap A_2) = \frac{f(B_1 \cap A_2)}{n} = \frac{5}{100} = 0.05$$

2-حساب احتمال أن يكون ممن يعملون بالقطاع العام أو من خريجي قسم ادارة صناعية.

$$P(A_1 \cup B_2) = p(A_1) + P(B_2) - P(A_1 \cap B_2)$$
$$= \frac{35}{100} + \frac{35}{100} - \frac{8}{100} = \frac{62}{100} = 0.62$$

3-حساب احتمال أن يكون من خريجي قسم ادارة صناعية أو من قسم محاسبة.

هذان حادثان متنافيان، لأن تخرج الفرد من أحد الأقسام ينفي تخرجه من الأقسام الأخرى، وبمعنى آخر استحالة أن الفرد تخرج من قسمين في آن واحد، لذا يكون احتمال اتحادهما هو:

$$P(B_2 \cup B_3) = p(B_2) + P(B_3)$$
$$= \frac{35}{100} + \frac{35}{100} = \frac{70}{100} = 0.70$$

4-إذا علم أن الفرد من خريجي قسم ادارة صناعية، ما احتمال أن يكون ممن يعملون بالقطاع المختلط، هذا احتمال شرطي، المطلوب هنا " حساب احتمال أن الفرد ممن يعملون بالقطاع المختلط. A_3 بشرط أنه من خريجي قسم ادارة صناعية B_2، أي أن الاحتمال المطلوب هو:

$$p(A_3 \mid B_2) = \frac{p(A_3 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{\left(\frac{10}{100}\right)}{\left(\frac{35}{100}\right)} = \frac{10}{35}$$

مثال(16): قدم المدير المالي لشركة الهلال الصناعية دراسة جدوى اقتصادية لتطوير خط إنتاجي جديد وتوصلت الدراسة للنتائج التالية والتي تمثل توزيع الربح للمنتوج الجديد بافتراض R تمثل فضاء العينة للربح للمنتج الجديد في السنة الأولى.

R فضاء الربح للمنتج الجديد	احتمال الحدوث
$A = \{R \geq 50\}$	0.20
$B = \{R : 40 \leq R < 50\}$	0.30
$C = \{R : 30 \leq R < 40\}$	0.20
$D = \{R : 20 \leq R < 30\}$	0.10
$E = \{R : 10 \leq R < 20\}$	0.10
$F = \{R : 0 \leq R < 10\}$	0.05
$G = \{R < 0\}$	0.05

في ضوء الدراسة المقدمة من قبل المدير المالي للشركة تم تطوير الخط الإنتاجي وطلب منه بمراقبة التقدم خلال سنة الإنتاج وبعد مضي ستة أشهر توصل إلى حقيقية أن الربح للمشروع الجديد المتحقق لا يقل عن 20 مليون دينار. وعلى هذا الأساس قدم المدير المالي مقترحاً جديداً لأن الجدول السابق لا يمكن تطبيقه وخاصة الحوادث G, F, E أصبحت غير ممكنة الحدوث.

الحل :

وعليه فإن مقترحه الجديد يعتمد على أن: $J = \{R \geq 20\}$ أي أن

$$J = A \cup B \cup C \cup D$$

وعليه فإن احتمال J سيكون

$$P(J) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$$
$$P(J) = 0.20 + 0.30 + 0.20 + 0.10 = 0.80$$

لأنها حوادث متنافية.

ويمكن تعديل النتائج كالآتي:

$$P(A|J)=\frac{P(A\cap J)}{P(J)}=\frac{P(A)}{P(J)}=\frac{0.20}{0.80}=0.25$$

$$P(B|J)=\frac{P(B\cap J)}{P(J)}=\frac{P(B)}{P(J)}=\frac{0.30}{0.80}=0.375$$

$$P(C|J)=\frac{P(C\cap J)}{P(J)}=\frac{P(C)}{P(J)}=\frac{0.20}{0.80}=0.25$$

$$P(D|J)=\frac{P(D\cap J)}{P(J)}=\frac{P(D)}{P(J)}=\frac{0.10}{0.80}=0.125$$

3.7.1 قانون ونظرية بيز

إذا كانت الحوادث A1، A2، .... ،An حوادث معرفة على فضاء العينة S أذ أن :

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 + \ldots\ldots\ldots \cup A_n = S$$

أي أن الحوادث A_1، .... A_n هي تجزيئات لفضاء العينة وتكون بمجموعها فضاء العينة. لأي حادثة ولتكن B معرفة على نفس فضاء العينة S بحيث أن $B=S\cap B$ أي أن B مجموعة جزئية من S فإن احتمال حدوث الحادثة B هو :

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+\ldots\ldots\ldots+P(A_n)P(B|A_n)$$

وهذا ما يسمى بقانون Bayes .

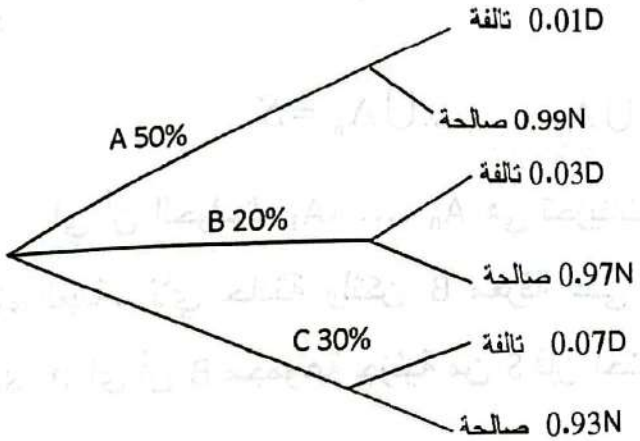
وإن حدوث الحدث A_i إذا كانت B قد وقعت فعلاً هو :

$$P(Ai|B)=\frac{P(Ai)P(B|Ai)}{P(A_1)P(B|A_1)+\ldots\ldots\ldots+P(A_n)P(B|A_n)}$$

وهذه هي نظرية Bayes .

مثال(17): A, B, C ثلاث شركات تنقل البضاعة من البصرة إلى بغداد، تنقل A (50%) من البضاعة وتنقل B (20%) وتنقل C (30%) منها فإذا كانت نسبة البضاعة التي تصل الى بغداد وتكون تالفة وللشركات الثلاثة على التوالي هي (0.01, 0.03, 0.07) فإذا وصلت البضاعة إلى بغداد واختيرت إحداها ما هو احتمال :

1) أن تكون تالفة.
2) إذا كانت تالفة ما هو احتمال أن تكون منقولة من قبل الشركة B.
3) ان تكون صالحة.
4) إذا كانت صالحة ما هو احتمال أن تكون منقولة من قبل الشركة A.



$$1\text{-}P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)$$

$$= (0.50)\ (0.01) + (0.20)\ (0.03) + (0.30)\ (0.07)$$

$$= 0.005 + 0.006 + 0.021 = 0.032$$

$$2\text{-}P(B|D) = \frac{P(B)P(D|B)}{P(D)}$$

$$= \frac{(0.20)(0.03)}{0.032} = 0.1875$$

$$3 - P(N) = P(A)P(N|A) + P(B)P(N|B) + P(C)P(N|C)$$

$$= (0.50)(0.99) + (0.20)(0.97) + (0.30)(0.93)$$

$$= 0.495 + 0.194 + 0.279$$

$$= 0.968$$

$$4 - P(A|N) = \frac{P(A)P(N|A)}{P(N)} = \frac{(0.50)(0.99)}{0.968} = 0.5113$$

مثال(18): ثلاث ماكنات تنتج جميع الوحدات وبنسب متساوية وجد أن الماكنة الأولى تنتج إنتاجاً معيباً بنسبة 5% والثانية بنسبة 10% والثالثة بنسبة 8% اختيرت وحدة واحدة من الإنتاج، ما هو احتمال أن:

1) أن تكون معيوبة D
2) أن تكون صالحة G
3) إذا كانت معيبة ما هو احتمال أن الماكنة الثالثة هي التي أنتجتها.
4) إذا كانت صالحة ما هو احتمال أن الماكنة الثانية هي التي أنتجتها.

الحل: