7-ويمكن حساب هذا الاحتمال بالتعويض عن $x=5$ في الدالة F(x) التي تم التوصل إليها مسبقاً

$$F(5) = P(x \le 5) =$$
$$= 0.006\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right] = 0.006\left[125 - \frac{125}{3}\right]$$
$$= 0.006\left(\frac{250}{3}\right) = 0.5$$

أي أن 50% من الأسر يقل إنفاقها عن 5 مائة آلف دينار.

التوزيع الطبيعي The Normal Distribution

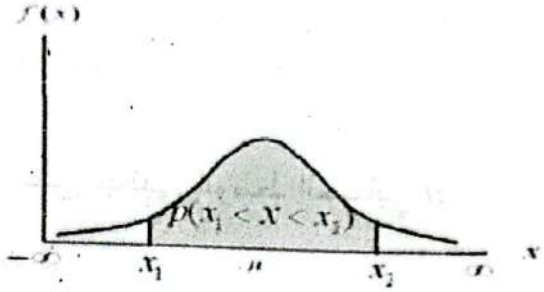
يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية وأكثرها استعمالاً على الاطلاق في النظرية الإحصائية وتطبيقاتها. أذا أن أغلب الظواهر الطبيعية تتبع هذا التوزيع. يستخدم هذا التوزيع في كافة مجالات الحياة مثل الطب والصناعة والزراعة والدراسات الاجتماعية وغيرها. وعلى سبيل المثال يعتبر هذا التوزيع ذو أهمية كبيرة في التجارب الصناعية واختبارات الجودة وله استخدامات واسعه أيضاً في اختبارات الفروض والعينات الكبيرة وتوزيعات المعاينة وغيرها.

إذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع طبيعي ، ذو مجال هو $-\infty < x < \infty$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad \pi = \frac{22}{7}$$

كيفية حساب الاحتمالات

بفرض أن الاحتمال المطلوب حسابه $P(x_1 < x < x_2)$ ، وهذا الاحتمال يحدد بالمساحة التالية:



واذ أن هذا التوزيع من التوزيعات المستمرة، فإن هذه المساحة (الاحتمال) تحسب بإيجاد التكامل التالي:

$$p(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

وهذا التكامل يصعب حسابه، ومن ثم لجأ الإحصائيين إلى عمل تحويل رياضي **Transform**، يمكن استخدام توزيعة الاحتمالي في حساب مثل هذه الاحتمالات، وهذه التحويلة هي:

$$z = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

ويعرف المتغير الجديد z بالمتغير الطبيعي القياسي **Standard Normal Variable**، وهذا المتغير له دالة كثافة احتمال تأخذ الصورة التالية:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad , \quad -\infty < z < \infty \quad , \quad \pi = \frac{22}{7}$$

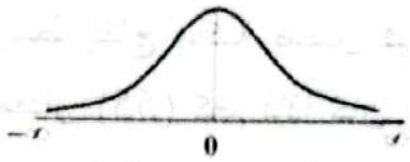
ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

1-متوسطه: $E(z) = 0$

2-تباينه: $\text{var}(z) = 1$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير z بالرموز $z \sim N(0,1)$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي القياسي بمتوسط (0) ، وتباين (1).

3-يأخذ المنحنى الشكل الناقوس المتماثل على جانبي الصفر:



وصمم الإحصائيون جداول إحصائية لحساب دالة التوزيع التجميعي $F(z) = P(Z < z)$ ، كما هو مبين بالرسم التالي:

ونعود الآن إلى خطوات حساب الاحتمال $P(x_1 < x < x_2)$ باستخدام التحويلة $z = (x - \mu)/\sigma$

1-يتم تحويل القيم الطبيعية (x_1, x_2) إلى قيم طبيعية قياسية:

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}, \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

2-أما إذا أردنا استخراج الاحتمال لقيم سالبة لـ X فان التوزيع متماثل وعليه فانه يمكن إيجاد هذه المساحة باستخدام العلاقة التالية:

$$P(Z \le -a) = 1 - P(Z \le a)$$

3-إن قيم جدول التوزيع الطبيعي القياسي محسوبة دائما للمساحة تحت المنحنى من $-\infty$ إلى النقطة المعينة **a** أي $P(z \le a)$ فمثلاً لو أردنا ايجاد الاحتمال

$$P(Z \ge a) = 1 - P(Z < a)$$

مثال(26): إذا كان متوسط إنتاج ماكنة طحين في مطحنة هو (700) كغم باليوم بانحراف معياري مقدار (55) كغم فإذا كان إنتاج المطحنة يتبع التوزيع الطبيعي ما هو احتمال إن ماكنة تنتج بين 625 كغم إلى 835 كغم (ما هو نسبة المكائن التي تنتج من 625 كغم إلى 835 كغم).

الحـل:

$$P(a < X < b) = P(Z_1 < Z < Z_2)$$

$$P(625 < X < 835) = P(Z_1 < Z < Z_2)$$

وباستعمال التحويل الى الدرجات المعيارية

$$P(625 < X < 835) = P\left(\frac{625-700}{55} < \frac{X-700}{55} < \frac{835-700}{55}{}_2\right)$$

$$\therefore P(775 < X < 835) = P(-1.363 < Z \le 2.454)$$
$$= P(Z < 2.454) - P(Z < -1.363)$$
$$= P(Z < 2.454) - \{1 - P(Z < 1.363)\}$$
$$= 0.9929 - \{1 - 0.9131\} = 0.906$$

أي إن 90% من المكائن تعطي إنتاجا يتراوح بين 625 إلى835 كغم/باليوم الواحد.

مثال(27): إذا كان متوسط عمر العامل في المنشأة الصناعية هو (27) سنة بانحراف معياري مقداره (4) سنوات أوجد:

1-نسبة العمال الذين أعمارهم تتراوح بين (23-31) سنة.

2-نسبة العمال الذين تجاوز سن 32 سنة.

3-نسبة العمال الذين أعمارهم اقل من (20) سنة.

الحـل:

$$1-P(23<X<31)=P(Z_1<Z<Z_2)$$

$$P(23<X<31)=P\left(\frac{23-27}{4}<\frac{X-27}{4}<\frac{31-27}{4}\right)$$

$$P(23<X<31)=P(-1<Z<1)$$

$$P(23<X<31)=P(Z<1)-P(Z<-1)$$

$$P(23<X<31)=P(Z<1)-\{1-P(Z<1)\}$$

$$P(23<X<31)=2P(Z<1)-1=2(0.8413)-1=0.6826$$

أي إن حوالي 68% من عمال المنشأة تتراوح أعمارهم بين 23 إلى 31 سنة وهذا الاحتمال يمثل قيمة العمر (X) المحصورة بين (23-31) سنة

$$2-P(X>32)=1-P(X<32)=1-P\left(Z<\frac{32-27}{4}\right)$$

$$P(X>32)=1-P(Z<1.25)=1-0.8944=0.1056$$

أي إن نسبة 10% فقط من العمال قد تتجاوز سنهم إلى32 سنة.

3- $P(X<20)=P(Z<Z_1)=P\left(Z<\frac{20-27}{4}\right)$

$$P(X<20)=P(Z<-1.75)=1-P(Z<1.75)$$

$$P(X<20)=1-0.9599=0.04$$

أي إن نسبة الذين تقل أعمارهم عن 20 سنة من العمال هو 4% فقط.

مثال(28): أراد أحد المدراء تعيين مجموعة من الموظفين بعد اجتيازهم امتحاناً تحريرياً وحصولهم على المستوى A وبعد إجراء الامتحان كان متوسط درجات المتقدمين هو (80) بانحراف معياري مقداره (9) فما هي اقل درجة تمثل المستوى A لكي يكون المتقدم مرشحا للوظيفة علما إن نسبة المتقدمين الذين حصلوا على المستوى A هو 0.18.

الحل:

$$P(Z>z)=0.18$$

$$P(Z\le z)=1-p(Z>z)$$

$$P(Z\le z)=1-0.18=0.82$$

لإيجاد القيمة Z فإنها تمثل قيمة Z المقابلة للاحتمال 0.82 في جدول التوزيع الطبيعي القياسي

$$\therefore Z=0.92$$

$$0.92=\frac{x-80}{9}$$

$$\therefore x=88.28$$

المستوى A سيمثل 89 ، فإذا حصل المرشح على اقل من هذه الدرجة سوف لا يقبل في الوظيفة.