وباستخدام القاعدة التالية: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ نحصل على

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = P_1(0) \cap P_2(0) =$$
$$(0.0497)(0.0183) = 0.0009$$

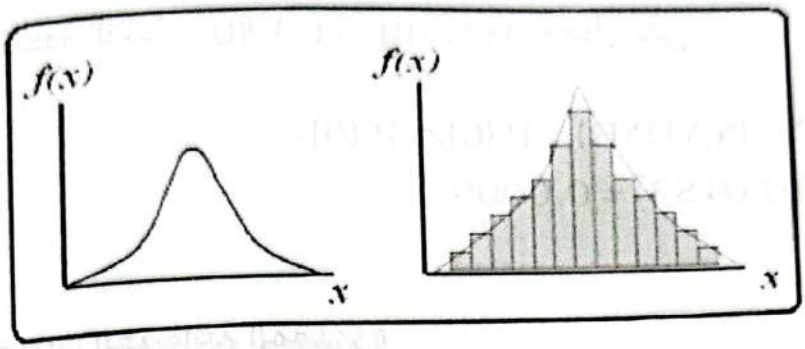
### 3.8.1 المتغيرات العشوائية المستمرة

### Continuous Random Variables

المتغير العشوائي المستمر، هو الذي يأخذ قيما متصلة، ويأخذ عدد لانهائي من القيم الممكنة له داخل مجاله، فإذا كان $X$ متغير عشوائي مستمر، ويقع في المدى (a,b)، أي أن: $\{X = x : a < x < b\}$، فإن للمتغير X عدد لانهائي من القيم تقع بين الحدين الأدنى والأعلى (a,b)، ومن الأمثلة على المتغيرات الكمية المستمرة ما يلي:

- كمية الألبان التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر: $\{X = x : 10 < x < 40\}$
- المساحة المنزرعة بالأعلاف بالألف هكتار $\{X = x : 1000 < x < 15000\}$
- فترة صلاحية حفظ الدجاج المبرد بالأيام، $\{X = x : 1 < x < 5\}$
- وزن الجسم بالكيلوغرام للأعمار من (30-40)، $\{X = x : 55 < x < 80\}$

عند تمثيل بيانات المتغير الكمي المستمر في شكل مدرج تكراري النسبي، نجد أن شكل هذا المدرج هو أقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر، وكلما ضاقت الفترات بين مراكز الفئات، يمكن الحصول على رسم دقيق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتغير المستمر، كما هو مبين بالشكل الاتي:




شكل منحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر

والمساحة أسفل المنحنى تعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، ولذا تساوي هذه المساحة الواحد الصحيح، وتسمى الدالة f(x) بدالة كثافة الاحتمال Probability Distribution Function (p.d.f) ، وبفرض المتغير العشوائي المستمر يقع في المدى: $X = \{x : a \prec x \prec b\}$، وأن منحنى هذه الدالة يأخذ الصورة التالية:

فإن من خصائص دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ما يلي:

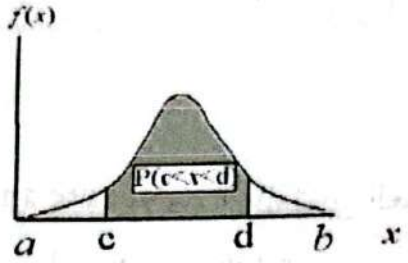
1-الدالة $f(x)$ موجبة داخل المدى (a,b) أي أن: $f(x) \succ 0$ ، $x \in (a,b)$

2-التكامل على حدود المتغير من الحد الأدنى a حتى الحد الأعلى b يعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، لذا يساوي الواحد الصحيح ، أي أن:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) = dx = 1$$

إذ أن الشكل الرياضي أعلاه يسمى بالتكامل المحدد من $x = a$ حتى $x = b$، وهذا يعني إيجاد المساحة أسفل المنحني بين (a,b).

1. لحساب احتمال أن المتغير العشوائي المستمر يقع في المدى (d,c) أي حساب الاحتمال $p(c < x < d)$، يجب حساب المساحة أسفل المنحني من $x = c$ حتى $x = d$ كما هي مبينة في الشكل البياني التالي:




ويتم ذلك بإيجاد التكامل المحدد في هذا المدى، كما يلي:

$$p(c < x < d) = \int_{x=a}^{x=b} f(x) = dx = [g(x)]_c^d = g(d) - g(c)$$

2. في المتغير المستمر، يكون الاحتمال $p(x = value)$ مساويا للصفر، أي أن:

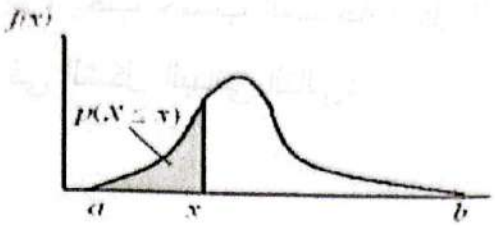
$$p(x = value) = 0$$

## تعريف

الدالة التجميعية للمتغير العشوائي المنفصل c. d. f. تعرف الدالة التجميعية للمتغير العشوائي بالشكل بالآتي:

$$C.D.F = F(x) = P(X \leq x) = \int_a^x f(x)dx$$

ويمكن توضيحها بيانياً بالرسم التالي:




**تعريف**

إذا كانت $f(x)$ هي دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي $x$ ، $a<x<b$ فإن التوقع الرياضي للدالة $h(x)$ تأخذ الصورة التالية:

$$E\big(h(x)\big) = \int_a^b h(x)dx$$

ومن ثم يمكن كتابة معادلة الوسط والتباين كما يلي.

$$\mu = E(x) = \int_a^b xf(x) = dx$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 \quad , \quad E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx$$

**مثال(25):** إذا كان الإنفاق الشهري للأسرة بمئات ألاف الدنانير على المواد الغذائية له دالة كثافة احتمال تأخذ الصورة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} cx(10-x) \ , \ 0<x<10 \\ 0 \qquad otherwise \end{cases}$$

والمطلوب:

1-حساب قيمة الثابت C .

2-احسب احتمال أن إنفاق الأسرة يتراوح ما بين (8,5) مائة ألف دينار خلال الشهر.

3-إذا كان لدينا 600 أسرة، فما هو عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن 3 مائة آلاف خلال الشهر؟

4-الوسط الحسابي (متوسط أنفاق الأسر).

5-التباين.

6-كوّن التوزيع الاحتمالي التجميعي.

7-حساب احتمال أن إنفاق الأسرة يقل عن 5 مائة آلف دينار. مستفيداً من دالة التوزيع التجميعي.

الحل:

1-حساب قيمة الثابت $c$

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\ dx = 1$$

وعليه فان

$$\int_{x=0}^{x=10} cx(10-x)\,dx = c\int_{x=0}^{x=10}(10x-x^2)\,dx = c\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right)-\frac{x^3}{3}\right]_0^{10}$$

$$= c\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = c\left[(5(100)-\frac{(1000)}{3})\right]-0$$

$$= \frac{500}{3}c = 1$$

$$c = 3/500 = 0.006$$

2-حساب أحتمال أن إنفاق الأسرة يتراوح بين (8,5) مائة ألف دينار خلال الشهر

$$p(5<x<8)=\int_{x=5}^{x=8}0.006x(10-x)\,dx=0.006\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_5^8$$

$$p(5<x<8)=0.006\left[\left(5(8)^2-\frac{8^3}{3}\right)-\left(5(5)^2-\frac{5^3}{3}\right)\right]$$

$$=0.006[(149.3333)-(83.3333)]$$

$$p(5<x<8)=0.006(66)=0.396$$

3- إذا كان لدينا 600 أسرة، فإن عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن 3 مائة آلف خلال الشهر

$$number\ of\ family=600\ \ p(x<3)$$

$$=600\int_0^3 0.006x(10-x)dx$$

$$=3.6\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=3.6[45-9]-0=129.6\approx 130$$

أي تقريباً **130** أسرة.

4-الوسط الحسابي

$$\mu=E(x)=\int_0^{10}xf(x)dx=\int_0^{10}x\left(0.006x(10-x)\right)=0.006\int_0^{10}(10x^2-x^3)dx$$

$$= 0.006\left[10\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = 0.006\left[\left(\frac{10000}{3} - \frac{10000}{4}\right) - (0)\right]$$

$$= 60\left[\frac{1}{12}\right] = 5$$

متوسط إنفاق الأسرة الشهري **5** مائة آلف.

5- التباين

$$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2 = E(x^2) - (5)^2$$

وأن

$$E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x)\ dx = 0.006\int_0^{10}(10x^3 - x^4)dx$$

$$E(x^2) = 0.006\left[10\left(\frac{x^4}{4}\right) - \left(\frac{x^5}{5}\right)\right]_0^{10} = 0.006\left[\frac{100000}{4} - \frac{100000}{5}\right] - 0$$

$$E(x^2) = 600\left(\frac{1}{20}\right) = 30$$

إذن التباين هو: $\sigma^2 = 30 - 25 = 5$

6-إيجاد دالة التوزيع التجميعي C.D.F

$$F(x) = \int_0^x f(x)\ dx$$

$$= \int_0^x 0.006x(10 - x)dx = 0.006\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^x$$

$$= 0.006\left[5x^2 - \left(\frac{x^3}{3}\right)\right]$$